

MECÂNICA CLÁSSICA

JACIRA CRISTINA B. DE FREITAS

Universidade Federal da Bahia
Curso de Graduação em Física
Departamento de Física da Terra e do Meio Ambiente

MECÂNICA CLÁSSICA
Adaptado do livro
“Classical dynamics of particles and systems”
Jerry B. Marion e Stephen T. Thornton
4ª Edição

JACIRA CRISTINA B. DE FREITAS

Salvador, fevereiro de 2001

Dedico este trabalho a Deus, em primeiro lugar, por ter me dado força, inspiração e saúde para concluí-lo, a meus pais que sempre acreditaram em minha força de vontade, a Naã, meu filho querido, que desde pequeno me acompanha nesta caminhada árdua, tornando-a mais agradável através dos momentos de felicidade vividos e aos meus queridos alunos que me incentivaram a realizá-lo para que eles pudessem ter ao alcance um material didático auxiliar tornando menos árdua a tarefa de estudar e entender a disciplina que é extensa e complexa.

Índice

Índice	1
Índice de figuras	5
Introdução	1
1 Matrizes, Vetores e Cálculo Vetorial	3
1.1 Introdução	3
1.2 Espaços Vetoriais Fundamentais	3
1.2.1 Notações	4
1.3 Fundamentos da Álgebra Vetorial e Matricial - Cálculo Vetorial	4
1.3.1 Conceito de um Escalar	4
1.3.2 Transformação de Coordenadas	6
1.3.3 Propriedades da Matriz Rotação	9
1.3.4 Operações com Matrizes	14
1.3.5 Outras Definições	16
1.3.6 Significado Geométrico das Matrizes Transformações	17
1.3.7 Definições de um escalar e um vetor em termos das propriedades de transformações	23
1.3.8 Operações Elementares com Escalar e Vetor	23
1.3.9 Tensor	33
1.3.10 Diferenciação e Integração de Vetores	34
1.4 Problemas Propostos	56
1.5 Expansões e Expressões Importantes	59
2 Mecânica de Newton	63
2.1 Introdução	63
2.2 Leis de Newton	64
2.3 Sistemas de Referência	64
2.4 A Equação de Movimento de uma Partícula	65
2.5 Teoremas da Conservação	76
2.6 Energia	80
2.7 Problemas Resolvidos	82
2.8 Problemas Propostos	87
2.9 Exercícios Extras Sobre Operadores Matemáticos	91

3	Alguns Métodos no Cálculo Variacional	95
3.1	Introdução	95
3.2	Definição do problema	95
3.3	Equação de Euler	97
3.4	A “Segunda Forma” da Equação de Euler	101
3.5	Funções com Várias Variáveis Dependentes	103
3.6	Equações de Euler quando condições auxiliares são impostas	104
3.7	Alguns Problemas Resolvidos	106
4	Princípio de Hamilton - Dinâmica Lagrangeana e Hamiltoniana	113
4.1	Introdução	113
4.2	Princípio de Hamilton	113
4.3	Coordenadas Generalizadas	117
4.4	Equações de Lagrange com Multiplicadores de Lagrange	131
4.5	Equivalência das Equações de Lagrange e de Newton	136
4.6	Um Teorema sobre a Energia Cinética	139
4.7	Os Teoremas da Conservação	140
4.8	Equações Canônicas do Movimento - Dinâmica de Hamilton	144
4.9	Problemas Resolvidos	150
4.10	Problemas Propostos	165
5	Movimento em Força Central	167
5.1	Introdução	167
5.2	Massa Reduzida	167
5.3	Teoremas da Conservação - Primeiras Integrais do Movimento	168
5.4	Equações de Movimento	170
5.5	Órbitas em um Campo Central	173
5.6	Energia Centrífuga e Potencial Efetivo	174
5.7	Movimento planetário - Problema de Kepler	176
5.8	Estabilidade de Órbitas circulares	185
5.9	Problemas Propostos	191
6	Gravitação	193
6.1	Introdução	193
6.2	Potencial Gravitacional	195
6.3	Linhas de Força e Superfícies Equipotenciais	203
6.4	Quando é que o conceito de Potencial é útil	204
6.5	Marés Oceânicas	206
6.6	Problemas Resolvidos	212
6.7	Algumas Expansões e Integrais Úteis	224
6.8	Problemas Propostos	225
7	Oscilações	227
7.1	Introdução	227
7.2	Oscilador Harmônico Simples	228
7.3	Oscilações Harmônicas em Duas Dimensões	231
7.4	Diagramas de Fase	234
7.5	Oscilações Amortecidas	236

7.5.1	Movimento Sub-amortecido	237
7.5.2	Movimento Criticamente Amortecido	241
7.5.3	Movimento Super-Amortecido	242
7.6	Forças Motrizes Senoidais	244
7.7	Sistemas Físicos	250
7.8	Oscilações Elétricas	250
7.9	Princípio da Superposição - Série de Fourier	256
7.10	A resposta de Osciladores Lineares para Funções Forças Impulsivas	259
7.11	Problemas Resolvidos	268
7.12	Problemas Propostos	280
8	Gabarito	285

Índice de figuras

1.1	Massa M localizada no ponto (x, y) .	5
1.2	Rotação do Sistema de Coordenadas.	5
1.3	Transformações de Coordenadas.	6
1.4	Exemplo1.	8
1.5	Representação espacial do vetor A.	10
1.6	Representação espacial dos vetores A e B.	10
1.7	Rotação dos eixos coordenados.	12
1.8	Rotação do ponto P.	12
1.9	Rotação de 90° em torno de x_3 e novas posições dos eixos.	18
1.10	Rotação de 90° em torno de x_1 e novas posições dos eixos.	19
1.11	Rotação de um ângulo θ em torno de x_3 .	20
1.12	Transformação Inversa.	21
1.13	Transformações Ortogonais.	25
1.14	Significado Geométrico do Produto Vetorial.	28
1.15	Interpretação Geométrica de $\frac{d\vec{A}}{ds}$.	35
1.16	Sistema de Coordenadas Polares planas.	36
1.17	Sistema de Coordenadas Cilíndricas.	38
1.18	Versores do Sistema de Coordenadas Cilíndricas.	38
1.19	Sistema de Coordenadas Esféricas.	40
1.20	Versores do Sistema de Coordenadas Esféricas.	41
1.21	Partícula movendo-se num círculo de raio R em torno de um eixo perpendicular ao plano do movimento.	42
1.22	Integração Vetorial.	45
1.23	Exemplo 1 de Integral de Linha.	46
1.24	Exemplo 2 de Integral de Linha.	50
1.25	Convenção de sinal da normal \hat{n} .	52
1.26	Elemento de área $d\vec{a}$.	52
1.27	Exemplo 3.	54
2.1	Exemplo 1.	65
2.2	Exemplo 4.	67
2.3	Exemplo 5.	67
2.4	Exemplo 6.	68
2.5	Exemplo 8a.	72
2.6	Exemplo 8b.	73
2.7	Exemplo 9.	74
2.8	Representação dos vetores posição e força.	77

2.9	Trabalho realizado para deslocar uma partícula entre duas posições quaisquer.	78
2.10	Gráfico de um potencial $U(x)$ em função de x .	80
2.11	Exemplo1.	83
2.12	Gráfico do potencial $U(x)$ em função de x .	85
2.13	Superfície sem atrito do Problema 12.	89
2.14	Massas do Problema 13.	90
2.15	Função Potencial do Problema 21.	92
3.1	Representação da função $\eta(x)$.	96
3.2	Exemplo 2.	98
3.3	Exemplo 3.	100
3.4	Problema 1.	106
3.5	Problema 3.	109
4.1	Pêndulo Plano.	116
4.2	Exemplo1.	118
4.3	Exemplo2.	119
4.4	Exemplo3.	121
4.5	Exemplo4.	123
4.6	Exemplo5.	125
4.7	Exemplo6.	128
4.8	Exemplo7.	129
4.9	Exemplo8.	131
4.10	Exemplo 9.	134
4.11	Sistema girado em torno de um certo eixo por um ângulo infinitesimal.	143
4.12	Exemplo 1.	147
4.13	Exemplo 2.	149
4.14	Exercício 1.	150
4.15	Exercício 2.	152
4.16	Exercício 3.	153
4.17	Exercício 4.	156
4.18	Exercício 5.	157
4.19	Exercício 6.	159
4.20	Exercício 7.	161
4.21	Exercício 8.	163
4.22	Exercício 01.	165
4.23	Exercício 10.	166
5.1	Representação do Centro de Massa de um sistema de duas partículas.	168
5.2	Representação do Vetor Momento Angular.	169
5.3	Interpretação Geométrica do Vetor Momento Angular.	170
5.4	Representação do Potencial Efetivo.	175
5.5	Representação da Energia Total.	176
5.6	A Geometria das Órbitas Elípticas.	179
5.7	As Órbitas e as Excentricidades das Várias Secções Cônicas.	181
5.8	A Parábola.	182
5.9	A Elipse.	182
5.10	Exemplo 6.	189

6.1	Força de Atração Gravitacional.	194
6.2	Força de Atração Gravitacional.	194
6.3	Exemplo 1 - Força gravitacional devida a uma casca esférica.	197
6.4	Potencial e Campo Gravitacionais de uma casca esférica.	200
6.5	Exemplo 2 - Potencial e Campo Gravitacionais de um anel uniforme.	200
6.6	Fluxo Gravitacional - Equação de Poisson.	202
6.7	Superfícies Equipotenciais para um sistema de duas partículas.	204
6.8	Exemplo 3 - Força Gravitacional devido a um disco uniforme.	205
6.9	Referenciais Inercial e Não inercial.	207
6.10	Vista polar da Terra com o eixo polar ao longo do eixo z	208
6.11	Forças de maré.	209
6.12	Exemplo 4 - Variação da altura máxima nas marés causada pela Lua	211
6.13	Distorção da maré.	212
6.14	Problema Resolvido 1.	213
6.15	Problema Resolvido 2.	214
6.16	Problema 03.	215
6.17	Problema 04 - Comportamentos da Força e do Potencial Gravitacionais.	218
6.18	Problema 06 - Gráfico da Força Gravitacional em função de r	218
6.19	Problema 07.	219
6.20	Problema 08.	220
6.21	Problema 11.	226
7.1	Pêndulo Simples.	230
7.2	Oscilador Bidimensional.	232
7.3	Figuras de Lissajous.	233
7.4	Figuras de Lissajous para o caso $\omega_y = 2\omega_x$ e $\delta = 0, \pi/3$ e $\pi/2$	234
7.5	Espaço de fase para o Oscilador Harmônico Simples.	235
7.6	Oscilador Amortecido: Sub-amortecido, criticamente amortecido e superamortecido.	237
7.7	Curvas Envelope e Deslocamento.	239
7.8	Oscilador Amortecido: Energia Total e Taxa de perda de Energia.	239
7.9	Coordenadas Polares.	240
7.10	O plano $u - \omega$	241
7.11	O plano $x - \dot{x}$	241
7.12	Diagrama de Espaço de Fase.	242
7.13	Deslocamento e Velocidade como funções do tempo.	243
7.14	Exemplo 02 - Pêndulo Simples.	243
7.15	Movimento Transiente de um oscilador forçado - (a) $\beta = 0,15$ e $\omega = \omega_1/7$; (b) $\beta = 0,30$ e $\omega = 5\omega_1$	247
7.16	Variação de δ com ω	248
7.17	(a) Oscilador Mecânico Simples e (b) Circuito Elétrico LC.	251
7.18	(a) Sistema massa-mola e (b) Circuito LC.	252
7.19	Oscilador Mecânico com amortecimento.	253
7.20	Associação de duas molas: (a) em série e (c) em paralelo. Associação de dois capacitores: (b) em paralelo e (d) em série.	254
7.21	Exemplo 04 - Função “dente de serra”.	257
7.22	Série de Fourier para a Função “dente de serra”.	259
7.23	Funções Degrau e Impulso.	260

7.24	Função resposta para o caso $\beta = 0, 2\omega_o$	261
7.25	Resposta Total para uma Função Impulso.	262
7.26	Resposta de um oscilador linear para uma força motriz impulsiva.	264
7.27	O método de Green.	264
7.28	Exemplo 05.	267
7.29	Problema Resolvido 03.	270
7.30	Problema Resolvido 04.	271
7.31	Problema Resolvido 07.	276
7.32	Problema Resolvido 08.	277
7.33	Circuito Equivalente.	278
7.34	Problema Resolvido 09.	280

Introdução

Este trabalho é o resultado de várias notas de aula, em curso de graduação por mim lecionado na Universidade Federal da Bahia e é baseado no livro de J.B. Marion e S.T.Thornton de Mecânica Clássica, intitulado “Classical dynamics of particles and systems”.

O seu propósito é apresentar um tratamento moderno de sistemas mecânicos de modo que a transição para a teoria quântica da física possa ser feita com o menor grau de dificuldade possível, assim como fornecer ao estudante novas técnicas matemáticas de modo a dar-lhe prática suficiente na resolução de problemas clássicos da Mecânica Clássica.

A Mecânica Clássica se interessa inicialmente em descrever o movimento de entes conhecidos como partículas. Obtemos uma descrição completa de uma partícula, em qualquer instante, especificando três coordenadas espaciais e uma constante escalar, denominada a sua massa. Os movimentos dos corpos de tamanho macroscópicos podem ser descritos de maneira muito precisa encarando-os como coleções de partículas no sentido acima definido.

No século XVII, Isaac Newton formulou suas famosas leis da Mecânica que servem para descrever e prever os movimentos de objetos observáveis no universo, incluindo aqueles dos planetas do nosso sistema solar.

No início do século XX foi descoberto que várias conclusões teóricas das leis de Newton não estavam em concordância com certas conclusões deduzidas do eletromagnetismo e fenômenos atômicos que estavam igualmente bem fundamentados experimentalmente. Essas discrepâncias levaram à Mecânica Relativística de Einstein que revolucionou os conceitos de Espaço e Tempo, e à Mecânica Quântica. Para objetos que se movem com velocidades muito menores que a da luz e que tem grandes dimensões comparadas com as dos átomos e moléculas, a Mecânica Newtoniana, também chamada de Mecânica Clássica, é ainda assim bastante satisfatória.

O formalismo de Newton pode ser chamado de Mecânica Vetorial, já que emprega quantidades tais como força e velocidade, que são de caráter essencialmente vetorial. Mas, as leis de Newton podem ser substituídas por um postulado único (o Princípio Variacional) que é, para muitas finalidades, de manipulação mais conveniente. Este formalismo alternativo, iniciado por Leibnitz e associado aos nomes de Euler, Lagrange e Hamilton é chamado de Mecânica Analítica. É completamente equivalente e sua vantagem reside na facilidade com que pode ser empregado para formular problemas complexos uma vez que as quantidades fundamentais são agora escalares em lugar de vetores, e as relações dinâmicas são obtidas por um processo sistemático de derivação. Este formalismo permite generalizações que atingem a Teoria Clássica dos campos e a Mecânica Quântica, nas quais as leis de Newton não podem ser aplicadas.

O estudo da Mecânica abre muitos horizontes para o estudante que se propõe a desenvolver pesquisa em ciências exatas e em tecnologia. Seus métodos são aplicáveis em várias outras disciplinas, mesmo de caráter teórico como, por exemplo, o campo das equações diferenciais ordinárias.

Neste trabalho é feita uma apresentação dos conceitos básicos da Dinâmica, partindo dos Princípios de Newton e finalizando com o tratamento canônico de Hamilton Jacobi e o estudo das Forças Centrais. A forma de exposição leva em conta a solução de problemas que frequentemente são encontrados na Mecânica Clássica, oferecendo, ainda, um bom número de exemplos ilustrativos e de problemas propostos.

A finalidade do trabalho não é certamente esgotar o assunto, muito amplo, da Mecânica Clássica. Para isso, o leitor encontrará subsídios nas obras indicadas na bibliografia.

Espero que este trabalho venha a atingir o seu propósito essencial que é o de apresentar ao estudante os conceitos físicos e os métodos matemáticos para estudá-los e entendê-los de uma maneira clara, concisa e interessante.

Desejo boa sorte a todos que se interessarem em enveredar pelos caminhos da Mecânica Clássica e espero encontrá-los pelo caminho em qualquer instante da caminhada que, embora seja árdua, pode ser transformada em algo prazeroso e estimulante.

Jacira C. B. Freitas

Instituto de Física da Universidade Federal da Bahia.

1

Matrizes, Vetores e Cálculo Vetorial

1.1 Introdução

Os fenômenos físicos podem ser discutidos de forma elegante e condensada usando métodos vetoriais. As leis físicas aplicadas à situações particulares devem apresentar resultados que independam do sistema de coordenadas escolhido (retangular, cilíndrico, esférico, etc).

Os resultados também podem ser independentes da escolha exata da origem das coordenadas.

O uso de vetores nos dá esta independência além de nos fornecer um método extremamente compacto de expressar até mesmo resultados bastante complicados.

1.2 Espaços Vetoriais Fundamentais

Quando representamos uma propriedade física através de uma variável do espaço \mathcal{R} , estamos considerando que essa propriedade varia de maneira CONTÍNUA. Por exemplo, o peso de uma amostra de areia é uma variável real enquanto o número de grãos nessa amostra é uma variável discreta. A hipótese do CONTÍNUO é uma “conveniência” matemática que permite aplicar o cálculo diferencial e integral ao estudo de fenômenos físicos pois, uma função derivável precisa ser contínua.

A partir do espaço \mathcal{R} , definimos o espaço vetorial mais importante da Mecânica, isto é,

$$\mathcal{R}^3 = \{(x, y, z); x, y, z \in \mathcal{R}\}$$

O espaço \mathcal{R}^3 dos vetores de três componentes é capaz de representar a POSIÇÃO de um ponto no espaço. Geralmente, o vetor-posição (x, y, z) e o tempo t são chamados VARIÁVEIS INDEPENDENTES. As propriedades físicas são frequentemente representadas como funções de (x, y, z, t) .

1.2.1 Notações

Os elementos de \mathcal{R} e \mathcal{R}^3 são denominados ESCALARES e VETORES, respectivamente. Os escalares não possuem notações específicas, enquanto os vetores admitem várias notações. Um vetor de componentes a_1, a_2, a_3 pode ser escrito nas seguintes formas:

$$(a_1, a_2, a_3) \Rightarrow \text{por extenso}$$

$$\vec{a} \Rightarrow \text{seta sobre a variável}$$

$$\mathbf{v} \Rightarrow \text{em negrito}$$

$$\underline{a} \Rightarrow \text{notação direta}$$

$$v_i \Rightarrow \text{notação indicial}$$

Por conveniência, não denotamos o vetor-posição por (x, y, z) , mas por (x_1, x_2, x_3) .

Outro espaço vetorial de interesse é $(\mathcal{R}^3)^2 = \mathcal{R}^3 \times \mathcal{R}^3$, que pode ser interpretado como o espaço das matrizes quadradas de ordem 3. Um elemento de $(\mathcal{R}^3)^2$ com componentes $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$ pode ser escrito, por extenso, como

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

em notação direta, $\underline{\underline{A}}$ e, em notação indicial por A_{ij} .

O espaço $(\mathcal{R}^3)^3$, pode ser interpretado como o espaço dos tensores de ordem 3. Um elemento desse espaço com componentes $c_{111}, c_{121}, \dots, c_{333}$ pode ser escrito, por extenso, como

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} c_{111} & c_{121} & c_{131} & c_{112} & c_{122} & c_{132} & c_{113} & c_{123} & c_{133} \\ c_{211} & c_{221} & c_{231} & c_{212} & c_{222} & c_{232} & c_{213} & c_{223} & c_{233} \\ c_{311} & c_{321} & c_{331} & c_{312} & c_{322} & c_{332} & c_{313} & c_{323} & c_{333} \end{array} \right]$$

em notação direta, $\underline{\underline{\underline{C}}}$ e, em notação indicial, C_{ijk} .

1.3 Fundamentos da Álgebra Vetorial e Matricial - Cálculo Vetorial

1.3.1 Conceito de um Escalar

Considere uma partícula de massa M localizada no ponto (x, y) e expressa como $M(x, y)$, como mostra a Figura (1.1).

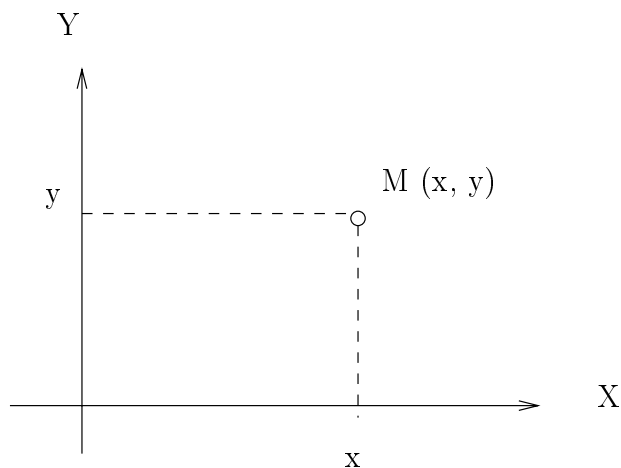
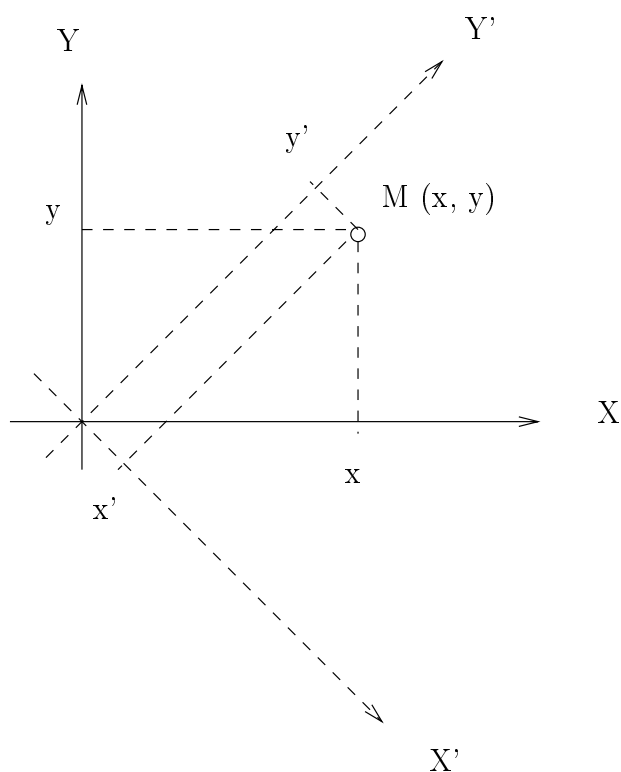
Figura 1.1: Massa M localizada no ponto (x, y) .

Figura 1.2: Rotação do Sistema de Coordenadas.

Se girarmos os eixos xy conforme mostra a Figura (1.2), observamos que a massa M estará localizada no ponto (x', y') e $M(x, y) = M(x', y')$ pois a massa de qualquer partícula não é afetada por uma mudança nos eixos coordenados.

Quantidades que são INVARIANTES sob transformação de coordenadas são chamadas ESCALARES.

Assim, podemos descrever a massa de uma partícula (ou a temperatura, etc) relativo à qualquer sistema de coordenadas por um mesmo número.

Entretanto, algumas propriedades físicas associadas com a partícula (tais como a direção do movimento de uma partícula ou a direção de uma força que atua sobre a partícula) não podem ser especificadas de uma maneira simples. A descrição destas quantidades mais complicadas requer o uso de VETORES.

Assim como um escalar é definido como uma quantidade que permanece invariante sob uma transformação de coordenadas, um vetor pode também ser definido em termos de propriedades de transformação.

1.3.2 Transformação de Coordenadas

Considere um ponto P com coordenadas (x_1, x_2, x_3) com relação a um certo sistema de coordenadas. Consideremos agora um sistema de coordenadas diferente, que possa ser gerado do inicial por uma simples rotação; sejam as coordenadas do ponto P com relação ao novo sistema de coordenadas dadas por (x'_1, x'_2, x'_3) . Para simplificar a visualização, apresentaremos o sistema apenas em duas dimensões, conforme ilustra a Figura (1.3).

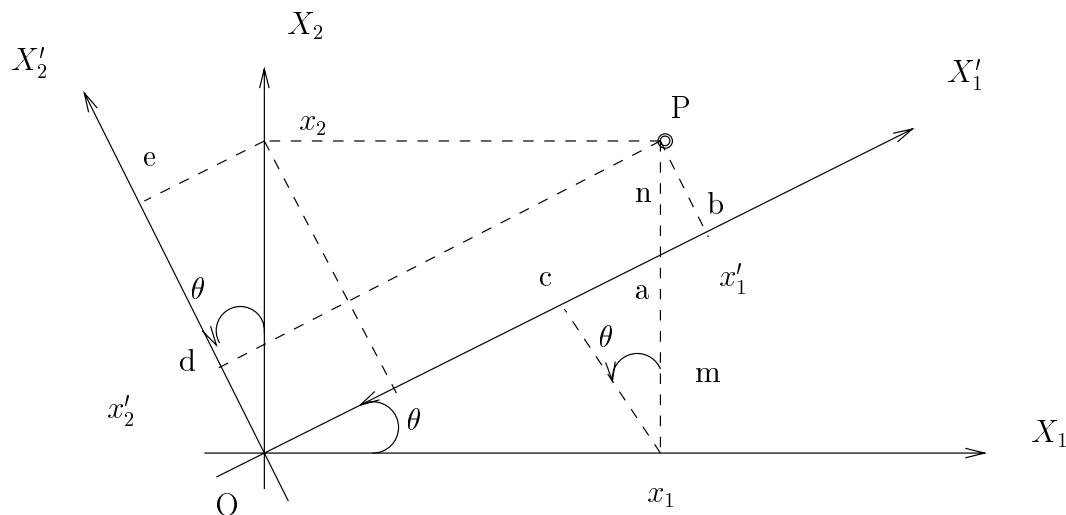


Figura 1.3: Transformações de Coordenadas.

Temos que

$$x'_1 = \overline{oc} + \overline{cb} = x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta$$

Mas,

$$\sin \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

Então,

$$x'_1 = x_1 \cos \theta + x_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

E,

$$x'_2 = \overline{oe} - \overline{de} = x_2 \cos \theta - x_1 \sin \theta$$

Mas,

$$-\sin \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

Então,

$$x'_2 = x_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + x_2 \cos \theta$$

Vamos introduzir a seguinte notação: Escreveremos o ângulo entre os eixos x'_i e x_j como (x'_i, x_j) . Definamos um conjunto de números λ_{ij} por,

$$\lambda_{ij} = \cos(x'_i, x_j) \quad (1.1)$$

Portanto, temos da Figura (1.3)

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{11} = \cos(x'_1, x_1) = \cos \theta \\ \lambda_{12} = \cos(x'_1, x_2) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta \\ \lambda_{21} = \cos(x'_2, x_1) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta \\ \lambda_{22} = \cos(x'_2, x_2) = \cos \theta \end{array} \right.$$

Assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_1 = \lambda_{11} x_1 + \lambda_{12} x_2 \\ x'_2 = \lambda_{21} x_1 + \lambda_{22} x_2 \end{array} \right.$$

De maneira geral, em 3D, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_1 = \lambda_{11} x_1 + \lambda_{12} x_2 + \lambda_{13} x_3 \\ x'_2 = \lambda_{21} x_1 + \lambda_{22} x_2 + \lambda_{23} x_3 \\ x'_3 = \lambda_{31} x_1 + \lambda_{32} x_2 + \lambda_{33} x_3 \end{array} \right.$$

ou, de maneira condensada,

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 \lambda_{ij} x_j \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.2)$$

A transformação inversa é:

$$x_i = \sum_{j=1}^3 \lambda_{ji} x'_j \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.3)$$

A quantidade λ_{ij} é chamada COSSENO DIRETOR do eixo x'_i relativo ao eixo x_j e podemos representá-la na forma matricial

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

e é chamada MATRIZ TRANSFORMAÇÃO ou uma MATRIZ ROTAÇÃO.

EXEMPLO 1 : Na figura (1.4) um ponto P é representado no sistema (x_1, x_2, x_3) por $P(2, 1, 3)$. Outro sistema de coordenadas representa o mesmo ponto como $P(x'_1, x'_2, x'_3)$ mas em um sistema onde x_2 girou em torno do eixo x_1 e na direção do eixo x_3 de um ângulo de 30° . Encontre a matriz rotação e determine $P(x'_1, x'_2, x'_3)$. Resolução:

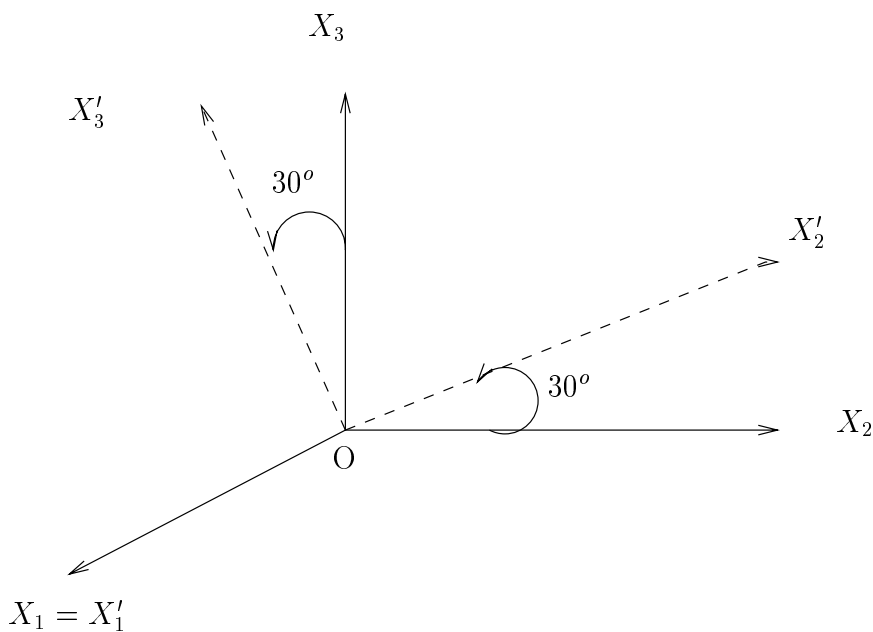


Figura 1.4: Exemplo1.

Cálculo de λ_{ij}

$$\lambda_{11} = \cos(x'_1, x_1) = \cos 0^\circ = 1$$

$$\lambda_{12} = \cos(x'_1, x_2) = \cos 90^\circ = 0$$

$$\lambda_{13} = \cos(x'_1, x_3) = \cos 90^\circ = 0$$

$$\lambda_{21} = \cos(x'_2, x_1) = \cos 90^\circ = 0$$

$$\lambda_{22} = \cos(x'_2, x_2) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\lambda_{23} = \cos(x'_2, x_3) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_{31} = \cos(x'_3, x_1) = \cos 90^\circ = 0$$

$$\lambda_{32} = \cos(x'_3, x_2) = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\lambda_{33} = \cos(x'_3, x_3) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Logo,

$$\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

E assim,

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 \lambda_{ij} x_j$$

Como $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 3$

$$x'_1 = 2, \quad x'_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad x'_3 = 3 \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$$

Observe que o operador rotação preserva o comprimento do vetor posição, isto é,

$$|\overline{OP}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

e

$$\sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2} = \sqrt{14}$$

1.3.3 Propriedades da Matriz Rotação

Pela Figura (1.5), podemos escrever,

$$\cos \alpha = \frac{A_x}{A}, \quad \cos \beta = \frac{A_y}{A}, \quad \cos \gamma = \frac{A_z}{A}.$$

Então,

$$\begin{cases} \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \\ \frac{A_x^2}{A^2} + \frac{A_y^2}{A^2} + \frac{A_z^2}{A^2} = 1 \end{cases}$$

E, portanto, encontramos a lei dos cossenos, isto é,

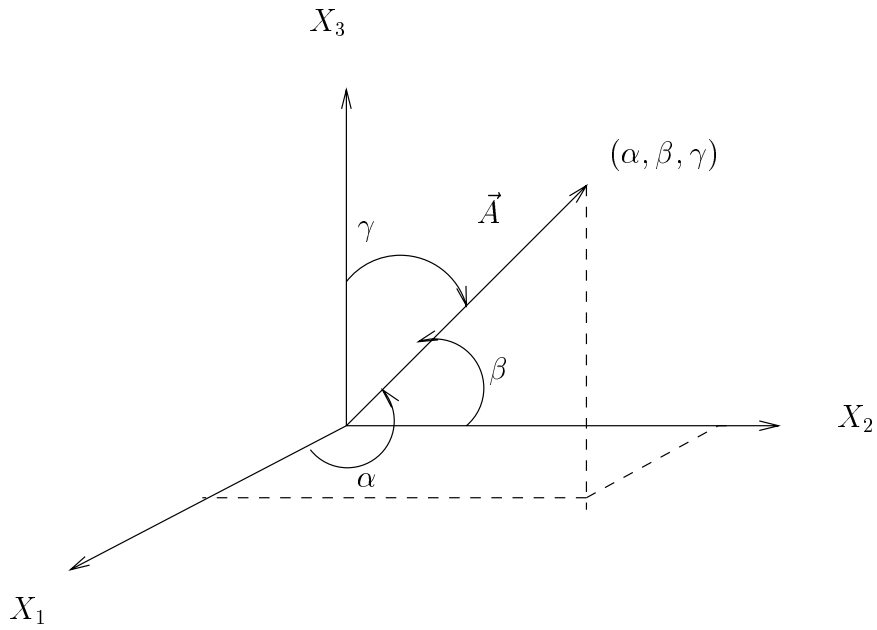


Figura 1.5: Representação espacial do vetor A.

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (1.5)$$

De maneira análoga, pela Figura (1.6), podemos escrever

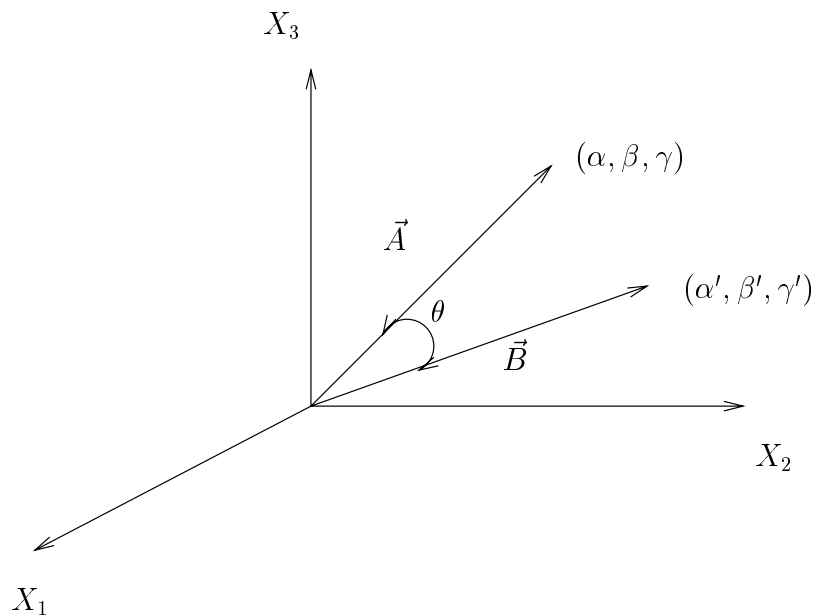


Figura 1.6: Representação espacial dos vetores A e B.

$$\cos \alpha' = \frac{B_x}{B}, \quad \cos \beta' = \frac{B_y}{B}, \quad \cos \gamma' = \frac{B_z}{B}.$$

Então,

$$\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{AB}$$

E assim,

$$\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' = \cos \theta \quad (1.6)$$

Vamos considerar, primeiramente, a linha A como sendo o eixo x'_1 e a linha B, o eixo x'_2 . Então,

$$\cos \alpha = \cos(x'_1, x_1) = \lambda_{11}$$

$$\cos \beta = \cos(x'_1, x_2) = \lambda_{12}$$

$$\cos \gamma = \cos(x'_1, x_3) = \lambda_{13}$$

$$\cos \alpha' = \cos(x'_2, x_1) = \lambda_{21}$$

$$\cos \beta' = \cos(x'_2, x_2) = \lambda_{22}$$

$$\cos \gamma' = \cos(x'_2, x_3) = \lambda_{23}$$

Como x'_1 e x'_2 são ortogonais, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Assim, substituindo na Equação (1.6), obtemos:

$$\lambda_{11} \lambda_{21} + \lambda_{12} \lambda_{22} + \lambda_{13} \lambda_{23} = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \implies \sum_{j=1}^3 \lambda_{1j} \lambda_{2j} = 0$$

E, de maneira geral,

$$\sum_{j=1}^3 \lambda_{ij} \lambda_{kj} = 0 \quad ; \quad i \neq k \quad (1.7)$$

Também, substituindo em (1.5), obtemos,

$$\lambda_{11} \lambda_{11} + \lambda_{12} \lambda_{12} + \lambda_{13} \lambda_{13} = 1$$

ou seja,

$$\sum_{j=1}^3 \lambda_{1j} \lambda_{1j} = 1$$

e, de maneira geral,

$$\sum_{j=1}^3 \lambda_{ij} \lambda_{kj} = 1; i = k$$

Temos, portanto, que:

$$\sum_{j=1}^3 \lambda_{ij} \lambda_{kj} = \delta_{ik} \quad (1.8)$$

onde δ_{ik} é o símbolo da DELTA DE KRONECKER, isto é,

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases} \quad (1.9)$$

A validade da equação (1.8) depende se os eixos coordenados do sistema são mutuamente perpendiculares. Tais sistemas são ditos serem ORTOGONAIS e a equação (1.8) é a CONDIÇÃO DE ORTOGONALIDADE. A matriz transformação λ especificando a rotação de qualquer sistema de coordenadas ortogonal deve então obedecer à equação (1.8). Vamos agora considerar os eixos fixos e permitir ao ponto P girar mantendo sempre constante a distância à origem. Observemos as Figuras (1.7) e (1.8).

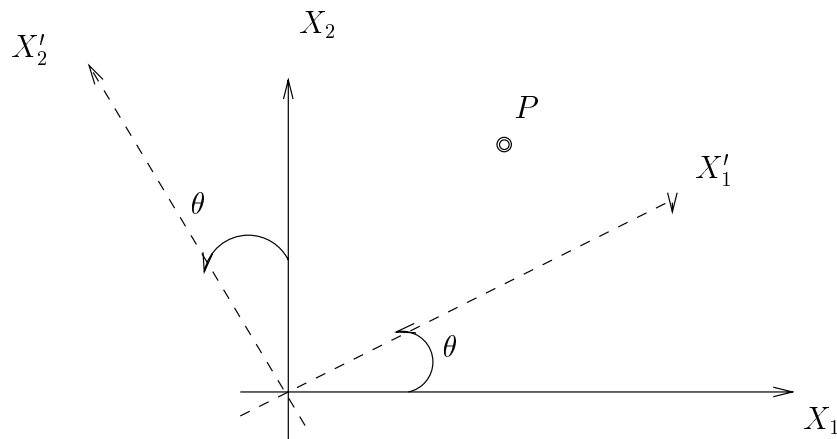


Figura 1.7: Rotação dos eixos coordenados.

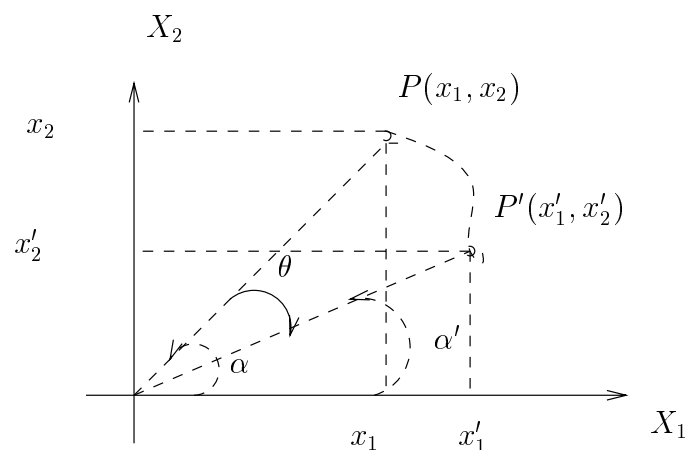


Figura 1.8: Rotação do ponto P.

Na Figura (1.7), os eixos x_1 e x_2 são os eixos de referência, e os eixos x'_1 e x'_2 foram obtidos por uma rotação de um ângulo θ . Assim, como já sabemos,

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta \\ x'_2 = -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \end{cases} \quad (1.10)$$

Na Figura (1.8), os eixos x_1 e x_2 são fixos e giramos o ponto P de um ângulo θ , no sentido oposto ao da rotação dos eixos da Figura (1.7). Temos então,

$$\begin{cases} \cos \theta = \cos(\alpha - \alpha') = \cos \alpha \cos \alpha' + \sin \alpha \sin \alpha' \\ \sin \theta = \sin(\alpha - \alpha') = \sin \alpha \cos \alpha' - \sin \alpha' \cos \alpha \end{cases} \quad (1.11)$$

Multiplicando a primeira equação do sistema (1.11) por x_1 e a segunda por x_2 , temos,

$$\begin{cases} x_1 \cos \theta = x_1 \cos \alpha \cos \alpha' + x_1 \sin \alpha \sin \alpha' \\ x_2 \sin \theta = x_2 \sin \alpha \cos \alpha' - x_2 \sin \alpha' \cos \alpha \end{cases}$$

Somando membro a membro, obtemos,

$$x'_1 = x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta$$

Multiplicando a segunda equação do sistema (1.11) por x_1 e a primeira por x_2 , temos,

$$\begin{cases} x_1 \sin \theta = x_1 \sin \alpha \cos \alpha' - x_1 \sin \alpha' \cos \alpha \\ x_2 \cos \theta = x_2 \cos \alpha \cos \alpha' + x_2 \sin \alpha \sin \alpha' \end{cases}$$

Somando membro a membro, obtemos,

$$x'_2 = -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta$$

Assim, podemos escrever,

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta \\ x'_2 = -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \end{cases} \quad (1.12)$$

Comparando (1.10) e (1.12), podemos dizer que a transformação atua sobre o ponto dando um novo estado ao ponto expresso com relação ao sistema de coordenadas fixo ou que a transformação atua sobre o referencial (sistema de coordenadas). Matematicamente as interpretações são EQUIVALENTES - os eixos girarem de um ângulo θ corresponde ao ponto girar de um ângulo $-\theta$.

1.3.4 Operações com Matrizes

i) Matriz Quadrada ($n \times n$)

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix}$$

ii) Matriz Coluna ($m \times n$)

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

iii) Regras para Multiplicação de Matrizes

$$x'_i = \sum_j \lambda_{ij} x_j \iff \mathbf{X}' = \lambda \mathbf{X}$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

E assim,

$$\begin{cases} x'_1 = \lambda_{11} x_1 + \lambda_{12} x_2 + \lambda_{13} x_3 \\ x'_2 = \lambda_{21} x_1 + \lambda_{22} x_2 + \lambda_{23} x_3 \\ x'_3 = \lambda_{31} x_1 + \lambda_{32} x_2 + \lambda_{33} x_3 \end{cases}$$

A multiplicação de uma matriz \mathbf{A} por uma matriz \mathbf{B} é definida só se o número de colunas de \mathbf{A} for igual ao número de linhas de \mathbf{B} , isto é,

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \mathbf{B}$$

$$C_{ij} = [\mathbf{AB}]_{ij} = \sum_k \mathbf{A}_{ik} \mathbf{B}_{kj}$$

EXEMPLO 2: Sejam:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

e,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcular $\mathbf{A B}$.

Resolução:

$$\mathbf{A B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

e assim,

$$\mathbf{A B} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 16 & 24 \\ -14 & -20 \end{pmatrix}$$

OBS: Multiplicação de matrizes NÃO É COMUTATIVA, isto é, em geral,

$$\mathbf{A B} \neq \mathbf{B A}$$

EXEMPLO 3: Sejam:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcular $\mathbf{A B}$ e $\mathbf{B A}$.

Resolução:

$$\mathbf{A B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

e assim,

$$\mathbf{A B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 13 & -8 \end{pmatrix}$$

e,

$$\mathbf{B A} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$$

Portanto, $\mathbf{A B} \neq \mathbf{B A}$.

Regras para adição de matrizes:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

Para somar matrizes, elas devem ter a mesma dimensão. A matriz soma é encontrada somando os elementos correspondentes.

1.3.5 Outras Definições

1 - Matriz Transposta: Matriz derivada de uma original, trocando-se as linhas pelas colunas, isto é,

$$\lambda_{ij}^t = \lambda_{ji}$$

é claro que,

$$(\lambda^t)^t = \lambda$$

2 - Matriz Identidade: Matriz que quando multiplicada por outra, mantém a última inalterada, ou seja,

$$\mathbf{I} \mathbf{A} = \mathbf{A} \quad \text{e} \quad \mathbf{A} \mathbf{I} = \mathbf{A}$$

onde,

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

OBS: A Matriz Identidade sempre comuta, isto é, $\mathbf{I} \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{I} = \mathbf{A}$.

3 - Matriz Inversa: Matriz que quando multiplicada pela original produz a Matriz Identidade, isto é,

$$\lambda \lambda^{-1} = \mathbf{I}$$

OBS1: A multiplicação de uma matriz pela sua inversa, sempre comuta, isto é,

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

OBS2: A Matriz Transposta e a Matriz Inversa de uma Matriz ORTOGONAL são sempre iguais, isto é,

$$\lambda^t = \lambda^{-1}$$

D] Seja a Matriz Rotação Ortogonal em 2 dimensões,

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix}$$

Então,

$$\lambda^t = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} \end{pmatrix}$$

Assim,

$$\lambda \lambda^t = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} \end{pmatrix}$$

então,

$$\lambda \lambda^t = \begin{pmatrix} \lambda_{11}^2 + \lambda_{12}^2 & \lambda_{11} \lambda_{21} + \lambda_{12} \lambda_{22} \\ \lambda_{11} \lambda_{21} + \lambda_{12} \lambda_{22} & \lambda_{21}^2 + \lambda_{22}^2 \end{pmatrix}$$

Mas, sabemos que,

$$\sum_j \lambda_{ij} \lambda_{kj} = \delta_{ik}$$

Logo,

$$\lambda_{11}^2 + \lambda_{12}^2 = \lambda_{11} \lambda_{11} + \lambda_{12} \lambda_{12} = 1$$

$$\lambda_{21}^2 + \lambda_{22}^2 = \lambda_{21} \lambda_{21} + \lambda_{22} \lambda_{22} = 1$$

e,

$$\lambda_{11} \lambda_{21} + \lambda_{12} \lambda_{22} = 0$$

Portanto,

$$\lambda \lambda^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

isto é,

$$\lambda \lambda^t = \mathbf{I} \implies \lambda^t = \lambda^{-1}$$

1.3.6 Significado Geométrico das Matrizes Transformações

i) Rotação de 90° em torno de x_3 :

Temos que,

$$\lambda_{11} = \cos(x'_1, x_1) = \cos 90^\circ = 0$$

$$\lambda_{12} = \cos(x'_1, x_2) = \cos 0^\circ = 1$$

$$\lambda_{13} = \cos(x'_1, x_3) = \cos 90^\circ = 0$$

$$\lambda_{21} = \cos(x'_2, x_1) = \cos 180^\circ = -1$$

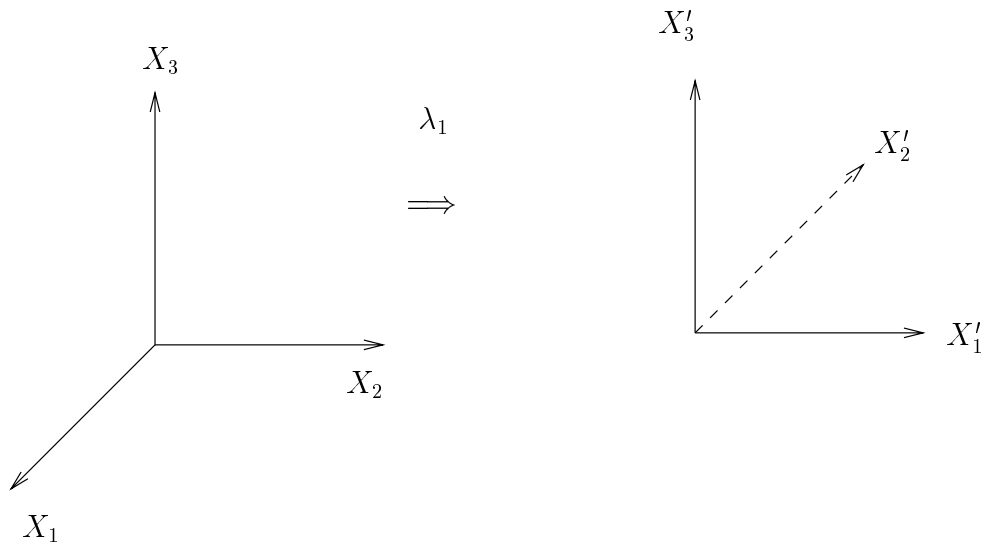


Figura 1.9: Rotação de 90° em torno de x_3 e novas posições dos eixos.

$$\lambda_{22} = \cos(x'_2, x_2) = \cos 90^\circ = 0$$

$$\lambda_{23} = \cos(x'_2, x_3) = \cos 90^\circ = 0$$

$$\lambda_{31} = \cos(x'_3, x_1) = \cos 90^\circ = 0$$

$$\lambda_{32} = \cos(x'_3, x_2) = \cos 90^\circ = 0$$

$$\lambda_{33} = \cos(x'_3, x_3) = \cos 0^\circ = 1$$

E então,

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ii) Rotação de 90° em torno de x_1 :

Temos que,

$$\lambda_{11} = \cos(x'_1, x_1) = \cos 0^\circ = 1$$

$$\lambda_{12} = \cos(x'_1, x_2) = \cos 90^\circ = 0$$

$$\lambda_{13} = \cos(x'_1, x_3) = \cos 90^\circ = 0$$

$$\lambda_{21} = \cos(x'_2, x_1) = \cos 90^\circ = 0$$

$$\lambda_{22} = \cos(x'_2, x_2) = \cos 90^\circ = 0$$

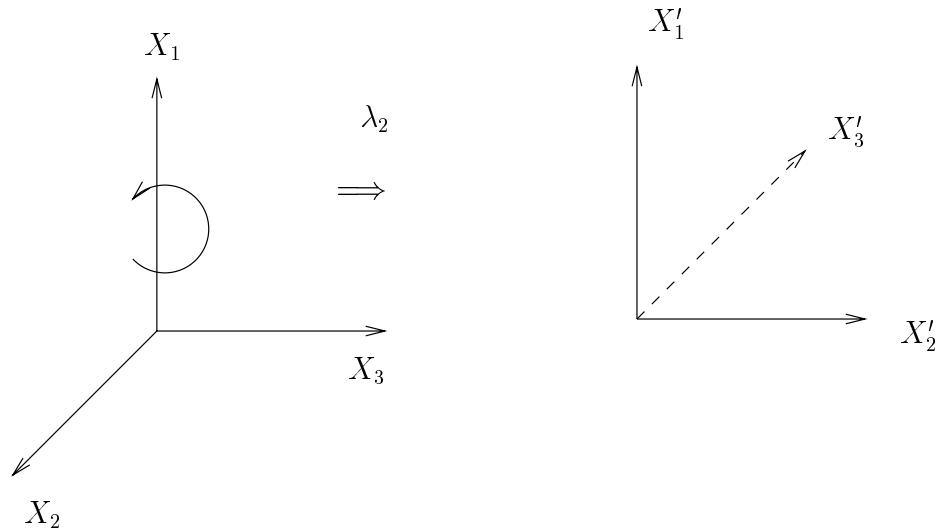


Figura 1.10: Rotação de 90° em torno de x_1 e novas posições dos eixos.

$$\lambda_{23} = \cos(x'_2, x_3) = \cos 0^\circ = 1$$

$$\lambda_{31} = \cos(x'_3, x_1) = \cos 90^\circ = 0$$

$$\lambda_{32} = \cos(x'_3, x_2) = \cos 180^\circ = -1$$

$$\lambda_{33} = \cos(x'_3, x_3) = \cos 90^\circ = 0$$

E então,

$$\lambda_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para encontrar a Matriz Transformação da TRANSFORMAÇÃO COMBINADA da rotação em torno do eixo x_3 seguida pela rotação em torno do novo eixo x'_1 , temos que:

$$\mathbf{X}' = \lambda_1 \mathbf{X} \text{ e } \mathbf{X}'' = \lambda_2 \mathbf{X}' \implies \mathbf{X}'' = \lambda_2 \lambda_1 \mathbf{X}$$

Podemos representar as duas rotações combinadas por uma única transformada λ_3 tal que,

$$\lambda_3 = \lambda_2 \lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

OBS: Cuidado com a ordem pois, $\lambda_1 \lambda_2 \neq \lambda_2 \lambda_1$.

iii) Rotação de um ângulo θ em torno de x_3 :

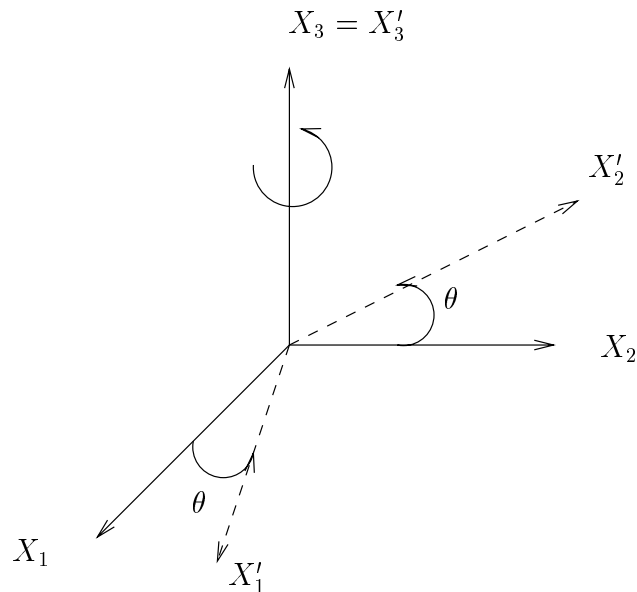


Figura 1.11: Rotação de um ângulo θ em torno de x_3 .

Temos que,

$$\lambda_{11} = \cos(x'_1, x_1) = \cos \theta$$

$$\lambda_{12} = \cos(x'_1, x_2) = \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\lambda_{13} = \cos(x'_1, x_3) = \cos 90^\circ = 0$$

$$\lambda_{21} = \cos(x'_2, x_1) = \cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta$$

$$\lambda_{22} = \cos(x'_2, x_2) = \cos \theta$$

$$\lambda_{23} = \cos(x'_2, x_3) = \cos 90^\circ = 0$$

$$\lambda_{31} = \cos(x'_3, x_1) = \cos 90^\circ = 0$$

$$\lambda_{32} = \cos(x'_3, x_2) = \cos 90^\circ = 0$$

$$\lambda_{33} = \cos(x'_3, x_3) = \cos 0^\circ = 1$$

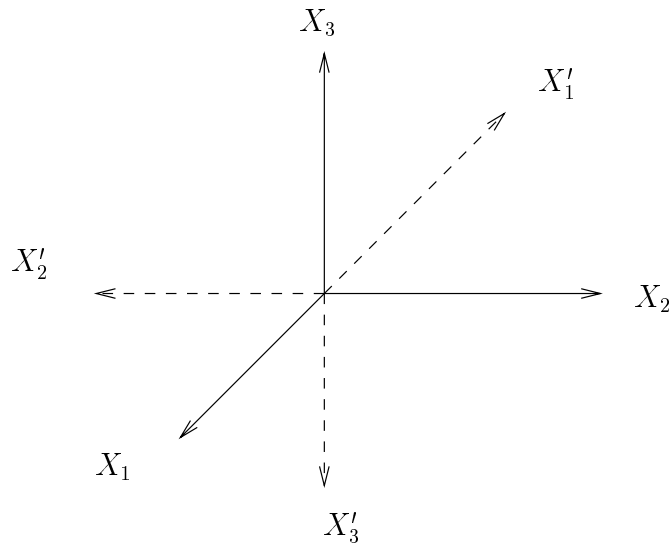


Figura 1.12: Transformação Inversa.

Logo,

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

iv) Reflexão em relação à origem dos eixos coordenados - TRANSFORMAÇÃO INVERSA.

Temos que,

$$\lambda_{11} = \cos(x'_1, x_1) = \cos 180^\circ = -1$$

$$\lambda_{12} = \cos(x'_1, x_2) = \cos 90^\circ = 0$$

$$\lambda_{13} = \cos(x'_1, x_3) = \cos 90^\circ = 0$$

$$\lambda_{21} = \cos(x'_2, x_1) = \cos 90^\circ = 0$$

$$\lambda_{22} = \cos(x'_2, x_2) = \cos 180^\circ = -1$$

$$\lambda_{23} = \cos(x'_2, x_3) = \cos 90^\circ = 0$$

$$\lambda_{31} = \cos(x'_3, x_1) = \cos 90^\circ = 0$$

$$\lambda_{32} = \cos(x'_3, x_2) = \cos 90^\circ = 0$$

$$\lambda_{33} = \cos(x'_3, x_3) = \cos 180^\circ = -1$$

Logo,

$$\lambda_{\mathfrak{S}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

AFIRMAÇÃO: Aplicações sucessivas de transformações ortogonais sempre resulta em uma transformação ortogonal.

D] Temos que:

$$x'_i = \sum_j \lambda_{ij} x_j \quad \text{e} \quad x''_k = \sum_i \mu_{ki} x'_i$$

Então,

$$x''_k = \sum_i \mu_{ki} \sum_j \lambda_{ij} x_j = \sum_j \left(\sum_i \mu_{ki} \lambda_{ij} \right) x_j$$

E assim,

$$x''_k = \sum_j [\mu \lambda]_{kj} x_j$$

Para mostrar que a transformação combinada é ortogonal, devemos ter,

$$(\mu \lambda)^t = (\mu \lambda)^{-1}$$

Temos que:

$$(\mu \lambda)^t = \lambda^t \mu^t$$

OBS: Mostrar que $(AB)^t = B^t A^t$

Seja $C = AB$. Então,

$$C_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj} \implies C_{ij}^t = C_{ji} = \sum_k A_{jk} B_{ki} = \sum_k B_{ki} A_{jk}$$

Como, $B_{ki} = B_{ik}^t$ e $A_{jk} = A_{kj}^t$

Então,

$$C_{ij}^t = \sum_k (B_{ik})^t (A_{kj})^t \implies C^t = B^t A^t$$

Como λ e μ são matrizes ortogonais,

$$\lambda^t = \lambda^{-1} \text{ e } \mu^t = \mu^{-1}$$

Assim,

$$(\mu \lambda)^t (\mu \lambda) = \lambda^t \mu^t \mu \lambda = \lambda^t \mathbf{I} \lambda = \lambda^t \lambda = \mathbf{I}$$

Logo,

$$(\mu \lambda)^t = (\mu \lambda)^{-1}$$

E portanto, $(\mu \lambda)$ é matriz ortogonal.

Se calcularmos o determinante das matrizes rotações, verificamos que as matrizes λ_1 , λ_2 , λ_3 e λ_4 apresentam determinantes iguais a $+1$. Estas rotações são chamadas de ROTAÇÕES PRÓPRIAS. Entretanto, a matriz λ_5 apresenta determinante igual a -1 e é denominada de ROTAÇÃO IMPRÓPRIA.

1.3.7 Definições de um escalar e um vetor em termos das propriedades de transformações

Consideremos a transformação de coordenadas do tipo

$$x'_i = \sum_j \lambda_{ij} x_j ; \quad \sum_j \lambda_{ij} \lambda_{jk} = \delta_{ik}$$

I - Se sob tal transformação uma quantidade ϕ permanecer inalterada, então ϕ é dita ESCALAR (ou invariante escalar).

II - Se um conjunto de quantidades (A_1, A_2, A_3) é transformado do sistema x_i para o sistema x'_i por uma transformação λ com resultado

$$A'_i = \sum_j \lambda_{ij} A_j$$

então, as quantidades A_i transformam-se como as coordenadas de um ponto e, a quantidade $A = (A_1, A_2, A_3)$ é dita um VETOR.

1.3.8 Operações Elementares com Escalar e Vetor

Sejam \vec{A} e \vec{B} vetores e ϕ , ψ e ξ , escalares.

I - ADIÇÃO

i) Lei Comutativa: $A_i + B_i = B_i + A_i$ e $\phi + \psi = \psi + \phi$

ii) Lei Associativa: $A_i + (B_i + C_i) = (A_i + B_i) + C_i$ e $\phi + (\psi + \xi) = (\phi + \psi) + \xi$

II - MULTIPLICAÇÃO POR UM ESCALAR ξ :

i) $\xi \vec{A} = \vec{B}$ é um vetor.

Demonstração:

$$B'_i = \sum_j \lambda_{ij} B_j = \sum_j \lambda_{ij} \xi A_j = \xi \sum_j \lambda_{ij} A_j \implies B'_i = \xi A'_i$$

ii) $\xi \phi = \psi$ é um escalar.

III - Produto Escalar de dois vetores

Definição:

$$(\vec{A}, \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_i A_i B_i$$

Se $\vec{A} = A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3$, então o comprimento de \vec{A} é,

$$A = (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)^{1/2}$$

Consequência da definição: $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$, onde θ é o ângulo entre os vetores \vec{A} e \vec{B} .

Demonstração:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_i A_i B_i \implies \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} = \sum_i \frac{A_i}{A} \frac{B_i}{B}$$

Mas,

$$\frac{A_i}{A} = \cos \alpha_i \text{ e } \frac{B_i}{B} = \cos \beta_i$$

Logo,

$$\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} = \sum_i \cos \alpha_i \cos \beta_i = \cos \theta \implies (\vec{A}, \vec{B}) = AB \cos \theta$$

Mostremos que $\vec{A} \cdot \vec{B}$ é um escalar. Sabemos que \vec{A} e \vec{B} transformam-se como vetores, isto é,

$$A'_i = \sum_j \lambda_{ij} A_j \text{ e } B'_i = \sum_k \lambda_{ik} B_k$$

Logo,

$$\vec{A}' \cdot \vec{B}' = \sum_i A'_i B'_i = \sum_i \left(\sum_j \lambda_{ij} A_j \right) \left(\sum_k \lambda_{ik} B_k \right) = \sum_{j,k} \underbrace{\left(\sum_i \lambda_{ij} \lambda_{ik} \right)}_{\delta_{jk}} A_j B_k$$

Portanto,

$$\vec{A}' \cdot \vec{B}' = \sum_{j,k} \delta_{jk} A_j B_k \implies \vec{A}' \cdot \vec{B}' = \sum_j A_j B_j = \vec{A} \cdot \vec{B}$$

Como o valor do produto é inalterado pela transformação de coordenadas, o produto deve ser ESCALAR.

A distância da origem para o ponto (x_1, x_2, x_3) definido pelo vetor \vec{A} , chama-se VETOR POSIÇÃO, e é dado por,

$$|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{\sum_i x_i^2}$$

e a distância entre o ponto (x_1, x_2, x_3) definido pelo vetor \vec{A} e outro ponto (x'_1, x'_2, x'_3) , definido pelo vetor \vec{B} , é,

$$\sqrt{\sum_i (x_i - x'_i)^2} = \sqrt{(\vec{A} - \vec{B}) \cdot (\vec{A} - \vec{B})}$$

isto é, podemos definir o vetor ligando um ponto a outro, quaisquer, como a diferença dos vetores posição que definem os pontos individuais. A distância entre os pontos é o módulo do vetor diferença. Como o seu valor é a raiz quadrada de um produto escalar, é INVARIANTE sob uma transformação de coordenadas.

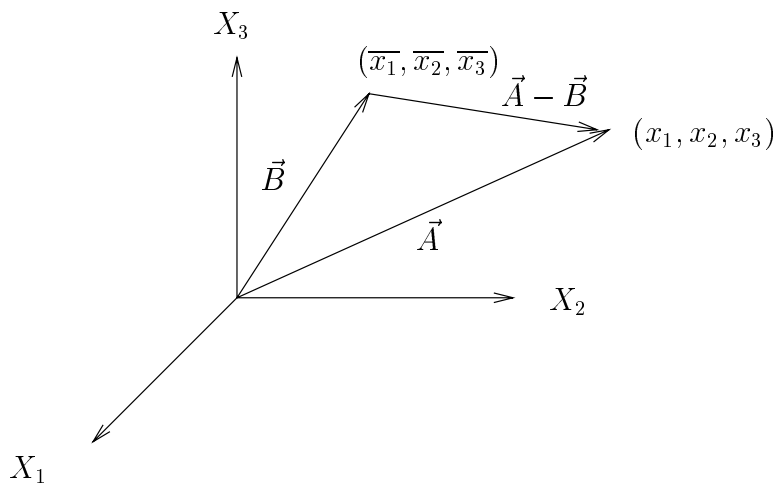


Figura 1.13: Transformações Ortogonais.

CONCLUSÃO: TRANSFORMAÇÕES ORTOGONAIS SÃO TRANSFORMAÇÕES QUE PRESERVAM A DISTÂNCIA.

O Produto Escalar obedece as Leis Comutativa e Distributiva, isto é,

$$i) \vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_i A_i B_i = \sum_i B_i A_i = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

$$ii) \vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \sum_i A_i (B_i + C_i) = \sum_i (A_i B_i + A_i C_i) = \sum_i A_i B_i + \sum_i A_i C_i = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

IV - Vetores Unitários:

Definição: Vetores unitários são aqueles que tem comprimento igual à unidade de comprimento.

Existem vários símbolos para representar os vetores unitários:

$$(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}) ; (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3) ; (\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi) ; (\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}) \quad , \text{ etc.}$$

Assim,

$$\vec{A} = (A_1, A_2, A_3) = A_1 \hat{i} + A_2 \hat{j} + A_3 \hat{k} = A_1 \hat{e}_1 + A_2 \hat{e}_2 + A_3 \hat{e}_3 = \sum_i \hat{e}_i A_i$$

As componentes de um vetor são dadas pelas projeções do vetor sobre os eixos, isto é,

$$A_i = \hat{e}_i \cdot \vec{A}$$

Demonstração:

$$\hat{e}_1 \cdot \vec{A} = \underbrace{\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1}_{=1} A_1 + \underbrace{\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2}_{=0} A_2 + \underbrace{\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_3}_{=0} A_3 \implies \hat{e}_1 \cdot \vec{A} = A_1$$

De maneira análoga,

$$\hat{e}_2 \cdot \vec{A} = A_2 \text{ e } \hat{e}_3 \cdot \vec{A} = A_3$$

Portanto,

$$A_i = \hat{e}_i \cdot \vec{A}$$

Também, se dois vetores unitários quaisquer são ortogonais, então,

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$$

EXEMPLO 3: Sejam $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ e $\vec{B} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$. Determine:

- $\vec{C} = \vec{B} - \vec{A}$ e $|\vec{C}|$;
- $\vec{A} \cdot \vec{B}$ e $\cos \theta$, onde θ é o ângulo entre os vetores \vec{A} e \vec{B} ;
- B_A

Resolução:

$$\text{a) } \vec{C} = \vec{B} - \vec{A} = (4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}) \implies \vec{C} = 3\hat{i} - \hat{k}.$$

$$|\vec{C}| = \sqrt{3^2 + 1^2} \implies |\vec{C}| = C = \sqrt{10}.$$

$$\text{b) } \vec{A} \cdot \vec{B} = (\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}) \cdot (4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 4 + 4 + 6 \implies \vec{A} \cdot \vec{B} = 14.$$

$$|\vec{A}| = A = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} \implies A = 3;$$

$$|\vec{B}| = B = \sqrt{16 + 4 + 9} = \sqrt{29} \implies B = \sqrt{29};$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta \implies 14 = 3\sqrt{29} \cos \theta \implies \cos \theta = \frac{14}{3\sqrt{29}} \implies \theta = 30^\circ.$$

$$c) B_A = \hat{e}_A \cdot \vec{B}$$

Mas,

$$\hat{e}_A = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}}{3}$$

Logo,

$$B_A = \frac{\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}}{3} \cdot (4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) \implies B_A = \frac{4 + 4 + 6}{3} \implies B_A = \frac{14}{3}.$$

V - Produto Vetorial de dois vetores

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

As componentes de \vec{C} são definidas pela relação,

$$C_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} A_j B_k$$

onde ε_{ijk} é o símbolo de permutação (densidade ou tensor de Levi-Cevita) e tem as seguintes propriedades:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{se qualquer índice é igual a qualquer dos outros índices} \\ 1, & \text{se } i, j, k \text{ formam uma permutação par de } 1, 2, 3, \text{ isto é, cíclica} \\ -1, & \text{se } i, j, k \text{ formam uma permutação ímpar de } 1, 2, 3, \text{ isto é, não cíclica} \end{cases}$$

Assim, por exemplo,

$$\varepsilon_{122} = \varepsilon_{112} = \varepsilon_{221} = \varepsilon_{211} = \varepsilon_{222} = 0; \text{ etc.}$$

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1.$$

$$\varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1; \text{ etc.}$$

Portanto, podemos escrever as componentes de \vec{C} , como

$$C_1 = \sum_{2,3} \varepsilon_{1jk} A_j B_k = \underbrace{\varepsilon_{123}}_{=1} A_2 B_3 + \underbrace{\varepsilon_{132}}_{=-1} A_3 B_2 \implies C_1 = A_2 B_3 - A_3 B_2;$$

$$C_2 = \sum_{1,3} \varepsilon_{2jk} A_j B_k = \underbrace{\varepsilon_{213}}_{=-1} A_1 B_3 + \underbrace{\varepsilon_{231}}_{=1} A_3 B_1 \implies C_2 = A_3 B_1 - A_1 B_3$$

$$C_3 = \sum_{1,2} \varepsilon_{3jk} A_j B_k = \underbrace{\varepsilon_{312}}_{=1} A_1 B_2 + \underbrace{\varepsilon_{321}}_{=-1} A_2 B_1 \implies C_3 = A_1 B_2 - A_2 B_1$$

Calculamos agora a quantidade

$$(A B \sin \theta)^2 = A^2 B^2 \sin^2 \theta = A^2 B^2 (1 - \cos^2 \theta)$$

$$\begin{aligned}
 A^2 B^2 \sin^2 \theta &= A^2 B^2 - A^2 B^2 \cos^2 \theta = \left(\sum_i A_i^2\right)\left(\sum_i B_i^2\right) - \left(\sum_i A_i B_i\right)^2 = \\
 &= (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)(B_1^2 + B_2^2 + B_3^2) - (A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3)^2 = \\
 &= (A_2 B_3 - A_3 B_2)^2 + (A_3 B_1 - A_1 B_3)^2 + (A_1 B_2 - A_2 B_1)^2 = C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 = C^2
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$A^2 B^2 \sin^2 \theta = C^2 \implies C = AB \sin \theta$$

Geometricamente, $AB \sin \theta$ é a ÁREA DO PARALELOGRAMO definido pelos vetores \vec{A} e \vec{B} , isto é,

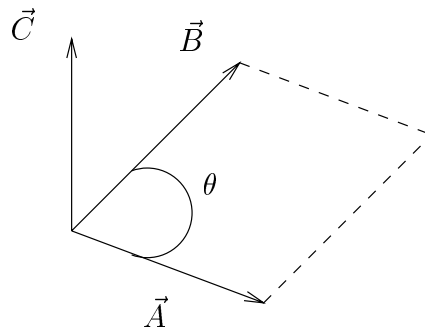


Figura 1.14: Significado Geométrico do Produto Vetorial.

EXEMPLO 4: Demonstrar que $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$

Resolução:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \sum_i A_i (\vec{B} \times \vec{C})_i$$

Mas,

$$(\vec{B} \times \vec{C})_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} B_j C_k$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} A_i B_j C_k = \sum_{kij} \epsilon_{ijk} C_k A_i B_j = \sum_k C_k \left(\sum_{ij} \epsilon_{kij} A_i B_j\right) = \sum_k C_k (\vec{A} \times \vec{B})_k = \\
 &= \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})
 \end{aligned}$$

Podemos escrever que,

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$$

Assim, os produtos escalar e vetorial podem ser trocados, mantendo a ordem A, B, C .

Temos uma igualdade muito importante e que será usada com relativa freqüência . Ela é,

$$\sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \quad (1.13)$$

DEMONSTRAÇÃO:

Para demonstrarmos (1.13), consideremos inicialmente a expressão do lado esquerdo e os seguintes possíveis casos:

a) $i = j \implies \sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} = \sum_k \varepsilon_{iik} \varepsilon_{lmk} = 0, \forall i, l, m$

b)

$$i = l \implies \sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} = \sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imk} = \begin{cases} 1, & \text{se } j = m \text{ e } k \neq i, j \\ 0, & \text{se } j \neq m \end{cases}$$

c)

$$i = m \implies \sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} = \sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lik} = \begin{cases} -1, & \text{se } j = l \text{ e } k \neq i, j \\ 0, & \text{se } j \neq l \end{cases}$$

d)

$$j = l \implies \sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} = \sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jmk} = \begin{cases} -1, & \text{se } i = m \text{ e } k \neq i, j \\ 0, & \text{se } i \neq m \end{cases}$$

e)

$$j = m \implies \sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} = \sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ljk} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = l \text{ e } k \neq i, j \\ 0, & \text{se } i \neq l \end{cases}$$

f) $l = m \implies \sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} = \sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mmk} = 0, \forall i, j, k$

Agora examinemos o lado direito de (1.13) para os mesmos possíveis casos:

a) $i = j \implies \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} = \delta_{il} \delta_{im} - \delta_{im} \delta_{il} = 0, \forall i, l, m$

b)

$$i = l \implies \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} = \delta_{ii} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{se } j = m \text{ e } k \neq i, j \\ 0, & \text{se } j \neq m \end{cases}$$

c)

$$i = m \implies \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} = \delta_{il} \delta_{ji} - \delta_{ii} \delta_{jl} = \begin{cases} -1, & \text{se } j = l \text{ e } k \neq i, j \\ 0, & \text{se } j \neq l \end{cases}$$

d)

$$j = l \implies \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} = \delta_{ij} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jj} = \begin{cases} -1, & \text{se } i = m \text{ e } k \neq i, j \\ 0, & \text{se } i \neq m \end{cases}$$

e)

$$j = m \implies \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} = \delta_{il} \delta_{jj} - \delta_{ij} \delta_{jl} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = l \text{ e } k \neq i, j \\ 0, & \text{se } i \neq l \end{cases}$$

$$f) l = m \implies \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} = \delta_{il} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jl} = 0, \forall i, j$$

Portanto,

$$\sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

i) Propriedades do Produto Vetorial

$$1 - \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times \vec{B})_i &= \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} A_j B_k = \sum_{jk} (-\varepsilon_{ikj} A_j B_k) \\ &= -\sum_{jk} \varepsilon_{ikj} B_k A_j = -(\vec{B} \times \vec{A})_i \implies \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \end{aligned}$$

$$2 - \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} [\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})]_l &= \sum_{mn} \varepsilon_{lmn} A_m (\vec{B} \times \vec{C})_n = \sum_{mn} \varepsilon_{lmn} A_m \left(\sum_{jk} \varepsilon_{njk} B_j C_k \right) = \sum_{jkmn} \varepsilon_{lmn} \varepsilon_{jkn} A_m B_j C_k = \\ &= \sum_{jkm} \left(\sum_n \varepsilon_{lmn} \varepsilon_{jkn} \right) A_m B_j C_k = \sum_{jkm} (\delta_{lj} \delta_{mk} - \delta_{lk} \delta_{mj}) A_m B_j C_k = \\ &= \sum_{jkm} \underbrace{\delta_{lj}}_{l=j} \underbrace{\delta_{mk}}_{m=k} A_m B_j C_k - \sum_{jkm} \underbrace{\delta_{lk}}_{l=k} \underbrace{\delta_{mj}}_{m=j} A_m B_j C_k = \sum_m A_m B_l C_m - \sum_m A_m B_m C_l = \\ &= B_l \left(\sum_m A_m C_m \right) - C_l \left(\sum_m A_m B_m \right) = B_l (\vec{A} \cdot \vec{C}) - C_l (\vec{A} \cdot \vec{B}) \end{aligned}$$

Assim,

$$[\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})]_l = B_l (\vec{A} \cdot \vec{C}) - C_l (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

E portanto,

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$3 - (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C}) \vec{A}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} [(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}]_l &= \sum_{mn} \varepsilon_{lmn} (\vec{A} \times \vec{B})_m C_n = \sum_{mn} \varepsilon_{lmn} \left(\sum_{jk} \varepsilon_{mjk} A_j B_k \right) C_n = \\ \sum_{jkmn} \varepsilon_{lmn} \varepsilon_{mjk} A_j B_k C_n &= - \sum_{jkn} \left(\sum_m \varepsilon_{lmn} \varepsilon_{jkm} \right) A_j B_k C_n = - \sum_{jkn} (\delta_{lj} \delta_{nk} - \delta_{lk} \delta_{nj}) A_j B_k C_n = \\ &= \sum_{jkn} \underbrace{\delta_{lk}}_{l=k} \underbrace{\delta_{nj}}_{n=j} A_j B_k C_n - \sum_{jkn} \underbrace{\delta_{lj}}_{l=j} \underbrace{\delta_{nk}}_{n=k} A_j B_k C_n = \\ \sum_n A_n B_l C_n - \sum_n A_l B_n C_n &= B_l \left(\sum_n A_n C_n \right) - A_l \left(\sum_n B_n C_n \right) = \\ &= B_l (\vec{A} \cdot \vec{C}) - A_l (\vec{B} \cdot \vec{C}) \end{aligned}$$

Assim,

$$[\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})]_l = B_l (\vec{A} \cdot \vec{C}) - A_l (\vec{B} \cdot \vec{C})$$

E portanto,

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{A} (\vec{B} \cdot \vec{C})$$

Portanto,

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \neq (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$$

EXEMPLO 5: Mostrar que $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{B} \cdot \vec{C})(\vec{A} \cdot \vec{D})$

Resolução:

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = \sum_i (\vec{A} \times \vec{B})_i (\vec{C} \times \vec{D})_i$$

Mas,

$$(\vec{A} \times \vec{B})_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} A_j B_k \quad e \quad (\vec{C} \times \vec{D})_i = \sum_{lm} \varepsilon_{ilm} C_l D_m$$

Logo,

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) &= \sum_i \left(\sum_{jk} \varepsilon_{ijk} A_j B_k \right) \left(\sum_{lm} \varepsilon_{ilm} C_l D_m \right) = \sum_{ijklm} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} A_j B_k C_l D_m = \\ &= \sum_{ijklm} \varepsilon_{jki} \varepsilon_{lmi} A_j B_k C_l D_m = \sum_{jklm} (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) A_j B_k C_l D_m = \\ &= \sum_{jklm} \underbrace{\delta_{jl} \delta_{km}}_{j=l \quad e \quad k=m} A_j B_k C_l D_m - \sum_{jklm} \underbrace{\delta_{jm} \delta_{kl}}_{j=m \quad e \quad k=l} A_j B_k C_l D_m = \\ \sum_{lm} A_l B_m C_l D_m - \sum_{lm} A_m B_l C_l D_m &= \left(\sum_l A_l C_l \right) \left(\sum_m B_m D_m \right) - \left(\sum_l B_l C_l \right) \left(\sum_m A_m D_m \right) = \\ &= (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{B} \cdot \vec{C})(\vec{A} \cdot \vec{D}) \end{aligned}$$

E portanto,

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{B} \cdot \vec{C})(\vec{A} \cdot \vec{D})$$

A ortogonalidade dos vetores unitários \hat{e}_i requer que, na ordem cíclica, o produto vetorial, $\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \hat{e}_k$, i, j, k , ou seja,

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \sum_k \hat{e}_k \varepsilon_{ijk}$$

Demonstração:

$$\sum_k \hat{e}_k \varepsilon_{ijk} = \hat{e}_i \underbrace{\varepsilon_{iji}}_{=0} + \hat{e}_j \underbrace{\varepsilon_{ijj}}_{=0} + \hat{e}_k \underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{=1} = \hat{e}_k$$

Assim, o produto $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ pode ser escrito como,

$$\vec{C} = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} \hat{e}_i A_j B_k$$

Demonstração:

$$\vec{C} = \sum_i C_i \hat{e}_i = \sum_i \left(\sum_{jk} \varepsilon_{ijk} A_j B_k \right) \hat{e}_i = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} \hat{e}_i A_j B_k$$

Também,

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} =$$

$$(A_2 B_3 - A_3 B_2) \hat{e}_1 + (A_3 B_1 - A_1 B_3) \hat{e}_2 + (A_1 B_2 - A_2 B_1) \hat{e}_3$$

Outras Identidades importantes são:

$$a) \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \overline{A B C}$$

Demonstração:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \sum_i A_i (\vec{B} \times \vec{C})_i = \sum_i A_i \left(\sum_{jk} \varepsilon_{ijk} B_j C_k \right) = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} A_i B_j C_k =$$

$$\sum_{ijk} B_j \varepsilon_{jki} C_k A_i = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \sum_{ijk} C_k \varepsilon_{kij} A_i B_j = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \overline{A B C}$$

$$b) (\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) = (\overline{A B D}) \vec{C} - (\overline{A B C}) \vec{D} = (\overline{A C D}) \vec{B} - (\overline{B C D}) \vec{A}$$

Demonstração:

$$[(\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D})]_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} (\vec{A} \times \vec{B})_j (\vec{C} \times \vec{D})_k =$$

$$\sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \left(\sum_{lm} \varepsilon_{jlm} A_l B_m \right) \left(\sum_{rs} \varepsilon_{krs} C_r D_s \right) = \sum_{ijklmrs} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{krs} A_l B_m C_r D_s =$$

$$\begin{aligned} \sum_{jlmrs} \varepsilon_{jlm} \left(\sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{rsk} \right) A_l B_m C_r D_s &= \sum_{jlmrs} \varepsilon_{jlm} (\delta_{ir} \delta_{js} - \delta_{is} \delta_{jr}) A_l B_m C_r D_s = \\ &= \sum_{jlmrs} \varepsilon_{jlm} \left[\underbrace{\delta_{ir} \delta_{js}}_{i=r, j=s} A_l B_m C_r D_s - \underbrace{\delta_{is} \delta_{jr}}_{i=s, j=r} A_l B_m C_r D_s \right] \\ \sum_{jlm} \varepsilon_{jlm} \left(A_l B_m C_i D_j - A_l B_m C_j D_i \right) &\implies [(\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D})]_i = (\overline{A} \overline{B} \overline{D}) C_i - (\overline{A} \overline{B} \overline{C}) D_i \end{aligned}$$

Portanto,

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) = (\overline{A} \overline{B} \overline{D}) \vec{C} - (\overline{A} \overline{B} \overline{C}) \vec{D}$$

1.3.9 Tensor

Tensores são importantes em muitas áreas da física, incluindo as teorias da relatividade e do eletromagnetismo. As propriedades elásticas, elétricas e magnéticas podem se comportar como tensores. Como um exemplo ilustrativo, consideremos o fluxo de corrente elétrica \vec{J} . Segundo a Lei de Ohm,

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

com a densidade de corrente \vec{J} e o campo elétrico \vec{E} , ambas quantidades vetoriais. Se tivermos um meio isotrópico, σ , a condutividade, é um escalar, e para a componente x , por exemplo,

$$J_1 = \sigma E_1$$

Contudo, se o meio é anisotrópico, como em muitos cristais, ou plasma na presença de um campo magnético, a densidade de corrente na direção x deve também depender dos campos elétricos nas direções y e z e não apenas do campo na direção x . Supondo uma relação linear, devemos escrever a componente x da densidade de corrente como,

$$J_1 = \sigma_{11} E_1 + \sigma_{12} E_2 + \sigma_{13} E_3$$

e, em geral,

$$J_i = \sum_k \sigma_{ik} E_k$$

Para o espaço ordinário tridimensional, a condutividade escalar σ é dada por um conjunto de nove elementos, σ_{ik} , isto é,

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Este arranjo de nove elementos forma um tensor de segunda ordem.

Seja um tensor de segunda ordem \mathbf{A} (componentes A^{kl}). Se $A^{kl} = A^{lk}$, então o tensor \mathbf{A} é dito SIMÉTRICO. Se $A^{kl} = -A^{lk}$, então ele é dito ANTI-SIMÉTRICO.

Assim, todo tensor pode ser escrito em termos de suas partes simétrica e anti-simétrica através da identidade,

$$A^{mn} = \frac{1}{2}(A^{mn} + A^{nm}) + \frac{1}{2}(A^{mn} - A^{nm})$$

onde o primeiro termo é um tensor simétrico e o segundo, um anti-simétrico. Esta resolução em tensores simétricos e anti-simétricos aparece na teoria da elasticidade. Uma similar resolução de funções em partes simétricas e antisimétricas é de extrema importância para a Mecânica Quântica.

Também podemos dizer que um escalar é um tensor de ordem zero e que um vetor é um tensor de primeira ordem.

1.3.10 Diferenciação e Integração de Vetores

Se uma função escalar $\phi = \phi(s)$ é diferenciável em relação à variável escalar s , então nenhuma parte de sua derivada pode variar sob uma transformação de coordenadas e assim a derivada deve ser escalar, isto é,

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{d\phi'}{ds'} = \left(\frac{d\phi}{ds}\right)'$$

De maneira análoga, pode-se definir a diferenciação de um vetor \vec{A} com relação a um escalar s .

Temos que as coordenadas de \vec{A} transformam-se de acordo com,

$$A'_i = \sum_j \lambda_{ij} A_j$$

Logo,

$$\frac{dA'_i}{ds'} = \frac{d}{ds'} \sum_j \lambda_{ij} A_j \implies \frac{dA'_i}{ds'} = \sum_j \lambda_{ij} \frac{dA_j}{ds'}$$

Como $s = s'$,

$$\frac{dA'_i}{ds'} = \left(\frac{dA_i}{ds}\right)' = \sum_j \lambda_{ij} \frac{dA_j}{ds}$$

Assim, as quantidades $\frac{dA_j}{ds}$ transformam-se como as de um vetor e, portanto, são componentes de um vetor que pode ser escrito como $\frac{d\vec{A}}{ds}$.

- Interpretação Geométrica de $\frac{d\vec{A}}{ds}$

Seja $\vec{A} = \vec{A}(s)$ uma função contínua de s

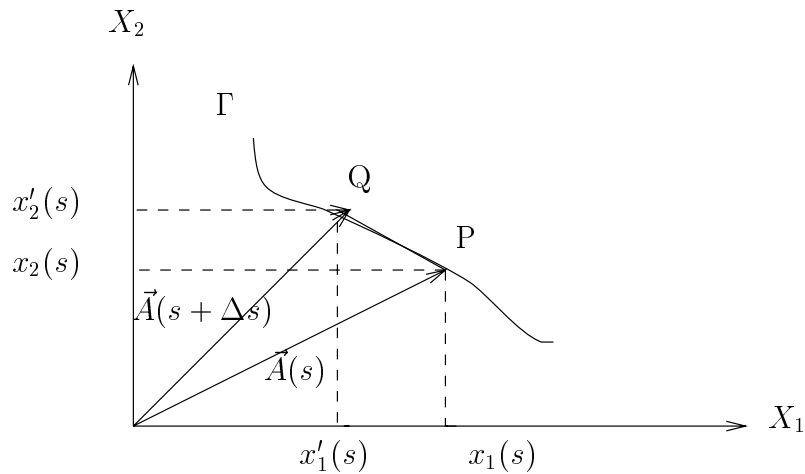


Figura 1.15: Interpretação Geométrica de $\frac{d\vec{A}}{ds}$.

$$\frac{\vec{A}(s + \Delta s) - \vec{A}(s)}{\Delta s} = \frac{\Delta \vec{A}}{\Delta s}$$

Então,

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{A}}{\Delta s} = \frac{d\vec{A}}{ds}$$

- Regras de Derivação:

$$1) \frac{d}{ds} (\vec{A} \pm \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{ds} \pm \frac{d\vec{B}}{ds}$$

$$2) \frac{d}{ds} (\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{ds} + \frac{d\vec{A}}{ds} \cdot \vec{B}$$

$$3) \frac{d}{ds} (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{ds} + \frac{d\vec{A}}{ds} \times \vec{B}$$

$$4) \frac{d}{ds} (\phi \vec{A}) = \phi \frac{d\vec{A}}{ds} + \frac{d\phi}{ds} \vec{A}$$

- Exemplos de Derivadas:

Definimos o vetor velocidade \vec{v} e o vetor aceleração \vec{a} como,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \quad \text{e} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

i) Em Coordenadas Retangulares (x_1, x_2, x_3)

Posição:

$$\vec{r} = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3 = \sum_i x_i \hat{e}_i$$

Velocidade:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \sum_i \dot{x}_i \hat{e}_i = \sum_i \frac{dx_i}{dt} \hat{e}_i$$

Aceleração:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \sum_i \dot{v}_i \hat{e}_i = \sum_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \hat{e}_i$$

onde, \hat{e}_i são os versores constantes no tempo.

Portanto,

$$d\vec{s} = dx_1 \hat{e}_1 + dx_2 \hat{e}_2 + dx_3 \hat{e}_3$$

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

$$\vec{v} = \dot{x}_1 \hat{e}_1 + \dot{x}_2 \hat{e}_2 + \dot{x}_3 \hat{e}_3$$

$$v^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2$$

ii) Em Coordenadas Polares Planas (r, θ)

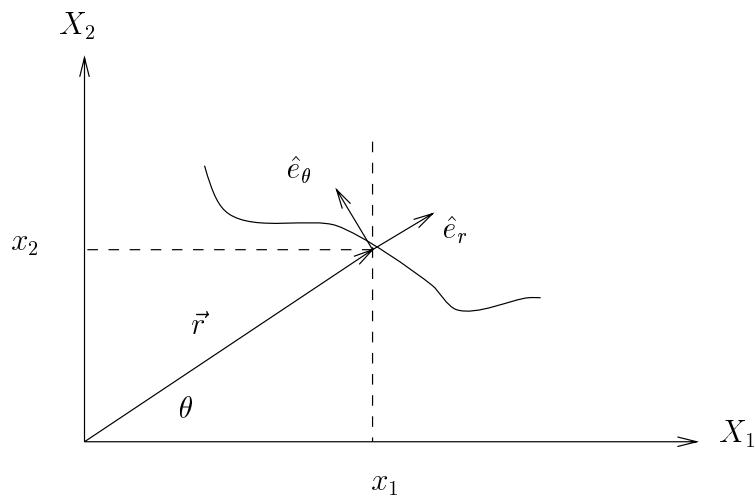


Figura 1.16: Sistema de Coordenadas Polares planas.

Temos que,

$$x_1 = r \cos \theta \quad ; \quad x_2 = r \sin \theta$$

Também,

$$x_1^2 + x_2^2 = r^2 \quad \text{e} \quad \tan \theta = \frac{x_2}{x_1}$$

Pela Figura (1.16), podemos escrever,

$$\begin{cases} \hat{e}_r = \hat{e}_1 \cos \theta + \hat{e}_2 \sin \theta \\ \hat{e}_\theta = -\hat{e}_1 \sin \theta + \hat{e}_2 \cos \theta \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{cases} \dot{\hat{e}}_r = -\hat{e}_1 \sin \theta \dot{\theta} + \hat{e}_2 \cos \theta \dot{\theta} \implies \dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta} \hat{e}_\theta \\ \dot{\hat{e}}_\theta = -\hat{e}_1 \cos \theta \dot{\theta} - \hat{e}_2 \sin \theta \dot{\theta} \implies \dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta} \hat{e}_r \end{cases}$$

Como, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ e $\vec{r} = r\hat{e}_r$

Então,

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + \dot{\hat{e}}_r r = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta$$

E assim,

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta$$

De modo que a velocidade tem uma componente radial \dot{r} e uma componente angular ou transversal $r \dot{\theta}$

Também,

$$\begin{aligned} \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{d}{dt} (\dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta) = \ddot{r} \hat{e}_r + \dot{r} \frac{d\hat{e}_r}{dt} + \dot{r} \dot{\theta} \hat{e}_\theta + r \ddot{\theta} \hat{e}_\theta + r \dot{\theta} \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = \\ &= \ddot{r} \hat{e}_r + \dot{r} \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{r} \dot{\theta} \hat{e}_\theta + r \ddot{\theta} \hat{e}_\theta + r \dot{\theta} (-\dot{\theta} \hat{e}_r) \end{aligned}$$

Assim,

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{e}_r + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \hat{e}_\theta$$

De modo que a aceleração tem uma componente radial $(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2)$ e uma componente transversal ou angular $(2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta})$.

iii) Em Coordenadas Cilíndricas (r, ϕ, z)

Pela Figura (1.17), temos que,

$$r = \rho \sin \theta$$

$$x_1 = r \cos \phi \implies x_1 = \rho \sin \theta \cos \phi$$

$$x_2 = r \sin \phi \implies x_2 = \rho \sin \theta \sin \phi$$

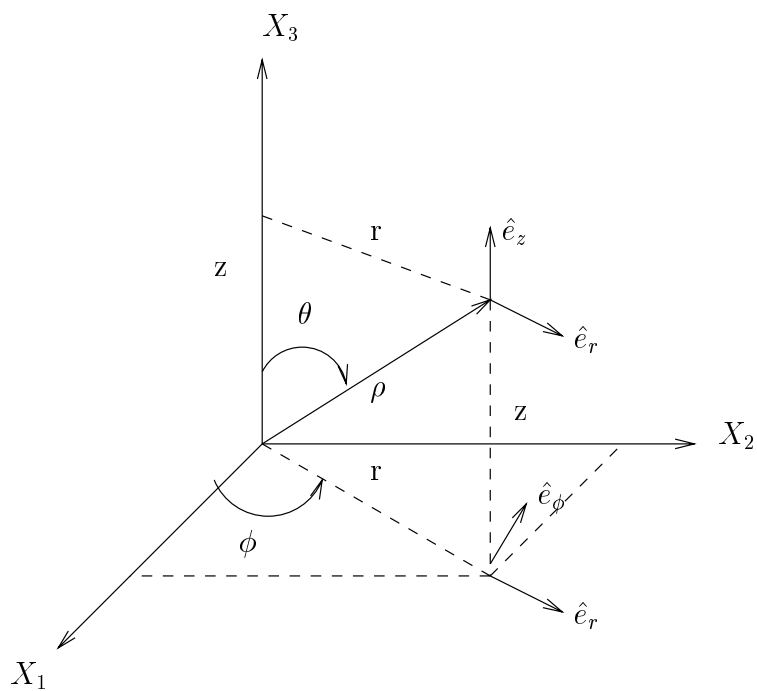


Figura 1.17: Sistema de Coordenadas Cilíndricas.

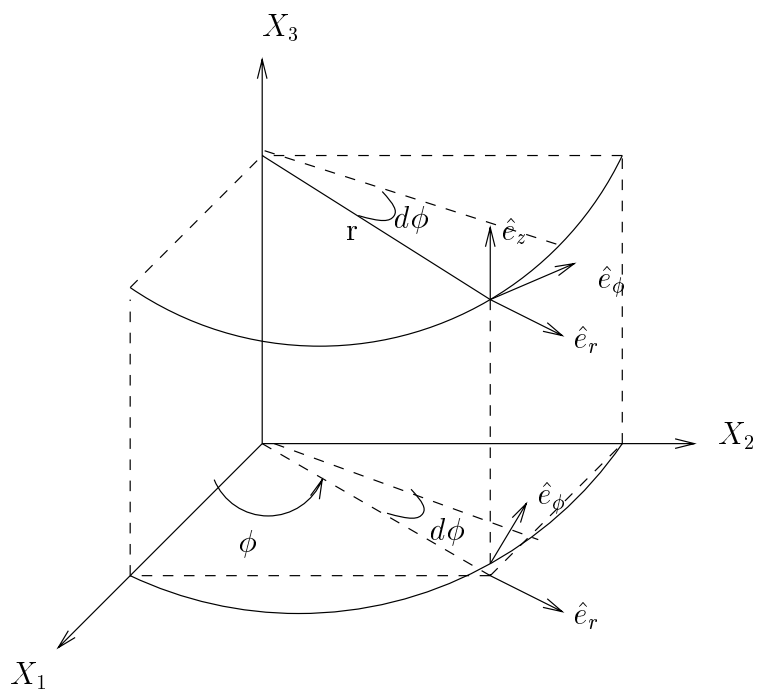


Figura 1.18: Vetores do Sistema de Coordenadas Cilíndricas.

$$x_3 = z \implies x_3 = \rho \cos \theta$$

A partir da Figura (1.18), podemos escrever,

$$\begin{cases} \hat{e}_r = \hat{e}_1 \cos \phi + \hat{e}_2 \sin \phi \\ \hat{e}_\phi = -\hat{e}_1 \sin \phi + \hat{e}_2 \cos \phi \\ \hat{e}_z = \hat{e}_3 \end{cases}$$

Também,

$$d\vec{s} = dr \hat{e}_r + r d\phi \hat{e}_\phi + dz \hat{e}_z \implies ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2$$

Então,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} \implies \vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \dot{z} \hat{e}_z$$

e,

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \dot{z} \hat{e}_z) = \\ &\ddot{r} \hat{e}_r + \dot{r} \frac{d\hat{e}_r}{dt} + \dot{r} \dot{\phi} \hat{e}_\phi + r \ddot{\phi} \hat{e}_\phi + r \dot{\phi} \frac{d\hat{e}_\phi}{dt} + \ddot{z} \hat{e}_z \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \hat{e}_r = \hat{e}_1 \cos \phi + \hat{e}_2 \sin \phi \implies \frac{d\hat{e}_r}{dt} &= -\dot{\phi} \sin \phi \hat{e}_1 + \dot{\phi} \cos \phi \hat{e}_2 = \\ \dot{\phi} (-\hat{e}_1 \sin \phi + \hat{e}_2 \cos \phi) \implies \frac{d\hat{e}_r}{dt} &= \dot{\phi} \hat{e}_\phi \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} \hat{e}_\phi = -\hat{e}_1 \sin \phi + \hat{e}_2 \cos \phi \implies \frac{d\hat{e}_\phi}{dt} &= -\dot{\phi} \cos \phi \hat{e}_1 - \dot{\phi} \sin \phi \hat{e}_2 = \\ -\dot{\phi} (\hat{e}_1 \cos \phi + \hat{e}_2 \sin \phi) \implies \frac{d\hat{e}_\phi}{dt} &= -\dot{\phi} \hat{e}_r \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \ddot{r} \hat{e}_r + \dot{r} \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \dot{r} \dot{\phi} \hat{e}_\phi + r \ddot{\phi} \hat{e}_\phi + r \dot{\phi} (-\dot{\phi} \hat{e}_r) + \ddot{z} \hat{e}_z \implies \\ \vec{a} &= (\ddot{r} - r \dot{\phi}^2) \hat{e}_r + (r \ddot{\phi} + 2\dot{r} \dot{\phi}) \hat{e}_\phi + \ddot{z} \hat{e}_z \end{aligned}$$

iv) Em Coordenadas Esféricas (r, θ, ϕ)

Pela Figura (1.19), temos que,

$$\begin{cases} x_1 = r \sin \theta \cos \phi \\ x_2 = r \sin \theta \sin \phi \\ x_3 = r \cos \theta \end{cases}$$

E,

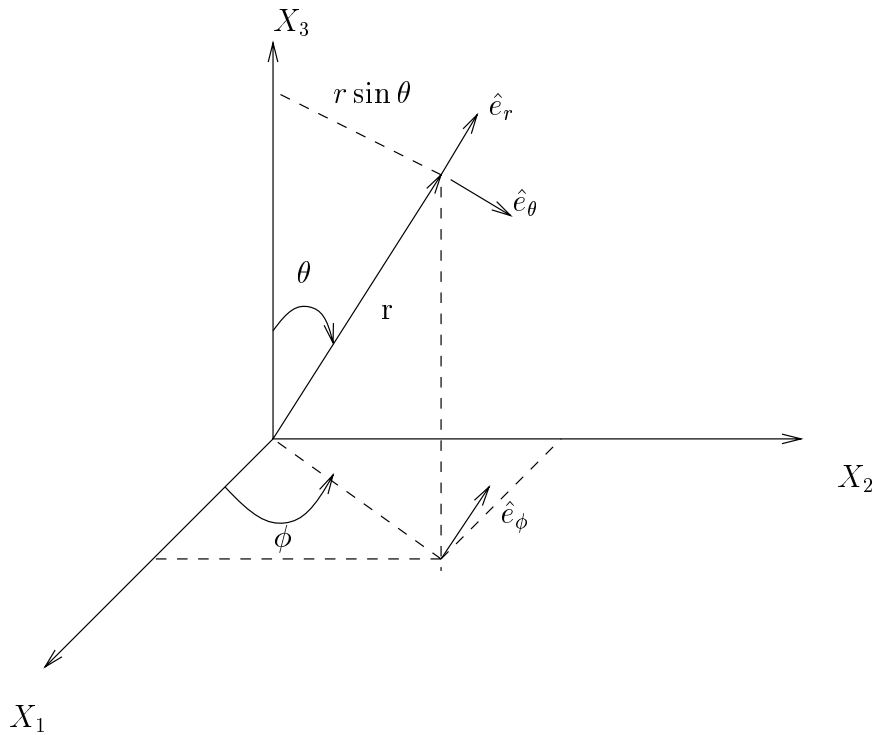


Figura 1.19: Sistema de Coordenadas Esféricas.

$$\tan \phi = \frac{x_2}{x_1} \quad \text{e} \quad \cos \theta = \frac{x_3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}}$$

Assim,

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + r^2 \cos^2 \theta = \\ &= r^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + r^2 \cos^2 \theta = r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta = r^2 \end{aligned}$$

ou seja,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$$

Pela Figura (1.20)

podemos escrever que,

$$\begin{cases} \hat{e}_r = \hat{e}_1 \sin \theta \cos \phi + \hat{e}_2 \sin \theta \sin \phi + \hat{e}_3 \cos \theta \\ \hat{e}_\theta = \hat{e}_1 \cos \theta \cos \phi + \hat{e}_2 \cos \theta \sin \phi - \hat{e}_3 \sin \theta \\ \hat{e}_\phi = -\hat{e}_1 \sin \phi + \hat{e}_2 \cos \phi \end{cases}$$

Também,

$$dV = r dr r d\theta \sin \theta d\phi \implies dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

E assim,

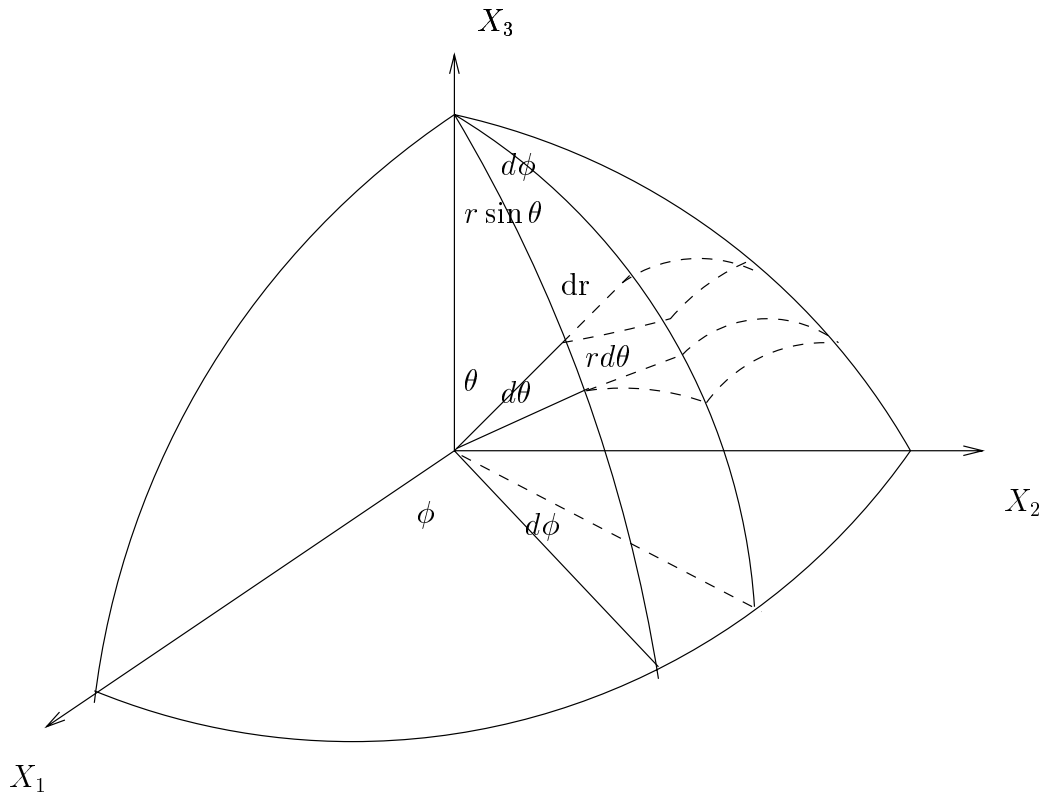


Figura 1.20: Vetores do Sistema de Coordenadas Esféricas.

$$d\vec{s} = dr \hat{e}_r + r d\theta \hat{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \hat{e}_\phi$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} \implies \vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta + r \sin \theta \dot{\phi} \hat{e}_\phi$$

- Velocidade Angular:

Uma partícula no espaço pode ser considerada, num dado instante, movendo-se num caminho circular plano em torno de um eixo, isto é, durante um intervalo de tempo infinitesimal δt o caminho descrito pela partícula pode ser representado como um arco de círculo infinitesimal. A linha que passa pelo centro do círculo e é perpendicular à distância instantânea do movimento é chamada EIXO DE ROTAÇÃO INSTANTÂNEO e a taxa de variação da posição angular é chamada de VELOCIDADE ANGULAR,

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

Considere uma partícula que move-se instantaneamente num círculo de raio R em torno de um eixo perpendicular ao plano de movimento, como mostra a Figura (1.21)

A taxa temporal de variação do vetor posição é o VETOR VELOCIDADE LINEAR da partícula, isto é,

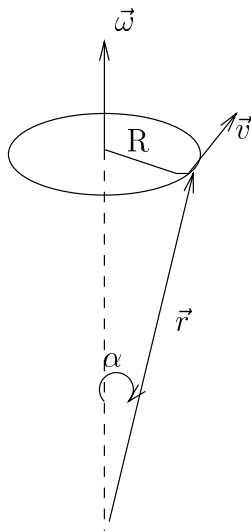


Figura 1.21: Partícula movendo-se num círculo de raio R em torno de um eixo perpendicular ao plano do movimento.

$$\vec{r} = \vec{v}$$

Para um movimento num círculo de raio R , o módulo da velocidade linear instantânea é,

$$v = R \frac{d\theta}{dt} \implies v = \omega R$$

onde, a direção de \vec{v} é perpendicular à \vec{r} e está no plano do círculo. Assim,

$$v = r \omega \sin \alpha \implies \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

- Operador Gradiente:

Considere um escalar ϕ que é uma função explícita das coordenadas x_i , e além disso, é uma função contínua dessas coordenadas numa certa região do espaço. Sob uma transformação de coordenadas que leva x_i em x'_i ,

$$\phi'(x'_1, x'_2, x'_3) = \phi(x_1, x_2, x_3)$$

e, pela regra da cadeia, podemos escrever,

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi'}{\partial x'_1} = \sum_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x'_1} \\ \frac{\partial \phi'}{\partial x'_2} = \sum_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x'_2} \\ \frac{\partial \phi'}{\partial x'_3} = \sum_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x'_3} \end{cases}$$

ou seja,

$$\frac{\partial \phi'}{\partial x'_i} = \sum_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}$$

Mas, a transformada inversa de coordenadas é,

$$x_j = \sum_k \lambda_{kj} x'_k$$

Logo,

$$\frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \frac{\partial}{\partial x'_i} \left(\sum_k \lambda_{kj} x'_k \right) = \sum_k \lambda_{kj} \underbrace{\frac{\partial x'_k}{\partial x'_i}}_{\delta_{ik}} = \sum_k \lambda_{kj} \delta_{ik} \implies \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \lambda_{ij}$$

Portanto,

$$\frac{\partial \phi'}{\partial x'_i} = \sum_j \lambda_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}$$

que é a transformação de um vetor.

Assim, embora ϕ seja um escalar, o GRADIENTE de ϕ é um vetor e é representado por,

$$\text{grad } \phi = \nabla \phi$$

E,

$$(\text{grad})_i = \nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

ou,

$$\text{grad} = \nabla = \sum_i \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

O operador GRADIENTE pode ser usado de várias maneiras:

1 - Operando diretamente sobre uma função escalar: GRADIENTE DE ϕ

$$\nabla \phi \quad (\text{Gradiente de } \phi)$$

2 - Em um Produto Escalar com uma Função Vetorial:

$$\nabla \cdot \vec{A} \quad (\text{Divergente de } \vec{A})$$

3 - Em um Produto Vetorial com uma Função Vetorial:

$$\nabla \times \vec{A} \quad (\text{Rotacional de } \vec{A})$$

- Interpretação Física do Gradiente de uma Função Escalar

Temos que,

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_3} dx_3 \implies$$

$$\implies d\phi = \sum_i \frac{\partial\phi}{\partial x_i} dx_i = \sum_i (\nabla\phi)_i dx_i$$

E portanto,

$$d\phi = (\nabla\phi) \cdot d\vec{s}$$

Se $\phi = \text{constante} \implies d\phi = 0 \implies \nabla\phi \perp d\vec{s}$.

Como $d\vec{s}$ é tangente à linha para a qual ϕ é constante, $\nabla\phi$ é normal à esta linha (ou superfície se for em três dimensões).

Temos também que $d\phi$ é máximo quando $\nabla\phi$ e $d\vec{s}$ estão na mesma direção, isto é,

$$(d\phi)_{max} = |\nabla\phi| ds \quad ; \quad \nabla\phi // d\vec{s}$$

ou,

$$|\nabla\phi| = \left(\frac{\partial\phi}{\partial s} \right)_{max}$$

E assim, $\nabla\phi$ está na direção de maior variação de ϕ .

Podemos assim concluir que:

i) O vetor $\nabla\phi$ é, em qualquer ponto, normal às linhas ou superfícies para as quais $\phi = \text{constante}$;

ii) O vetor $\nabla\phi$ tem a direção da máxima variação de ϕ ;

iii) Como qualquer direção no espaço pode ser especificada em termos do vetor unitário \hat{n} naquela direção, a taxa de variação de ϕ na direção \hat{n} (chamada derivada direcional de ϕ) pode ser representada por,

$$\hat{n} \cdot \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial n}$$

A operação sucessiva do operador gradiente fornece,

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

que é chamado LAPLACIANO. Assim,

$$\nabla^2 \phi = \sum_i \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2}$$

- Integração Vetorial

Na Figura (1.22), seja

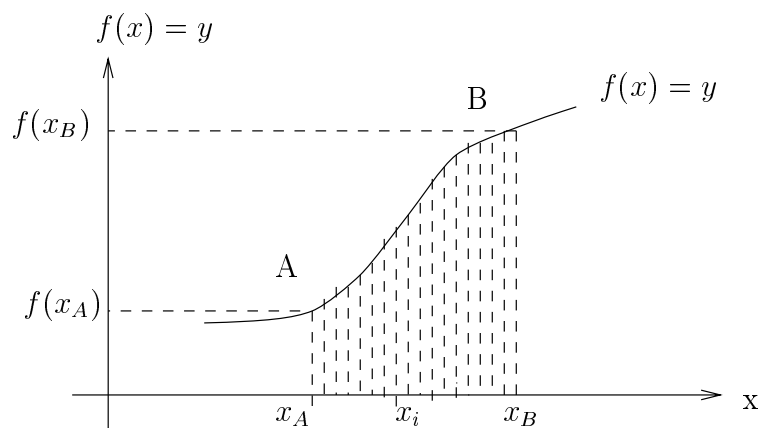


Figura 1.22: Integração Vetorial.

$$A' = \sum_i \Delta x_i f(x_i)$$

onde A' é a área aproximada, e

$$A = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \left(\sum_i \Delta x_i f(x_i) \right)$$

onde A é a área exata. Assim,

$$A = I = \int_{x_A}^{x_B} f(x) dx$$

A - Integral de Linha:

1 - Consideremos a integral,

$$\int_C \phi d\vec{r}$$

onde, $\phi = \phi(x, y, z)$ uma Função Escalar. Então,

$$\int_C \phi d\vec{r} = \hat{e}_1 \int_C \phi(x, y, z) dx + \hat{e}_2 \int_C \phi(x, y, z) dy + \hat{e}_3 \int_C \phi(x, y, z) dz$$

EXEMPLO 6: Integrar a Função Escalar $\phi = r^2 = x^2 + y^2$ da origem ao ponto $P = (1, 1)$ segundo os caminhos a , b e c mostrados na Figura (1.23).

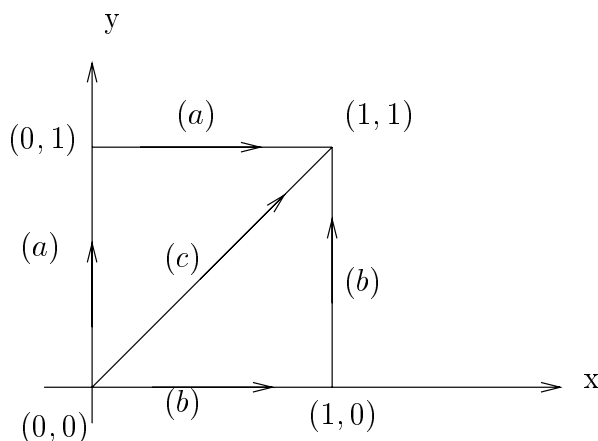


Figura 1.23: Exemplo 1 de Integral de Linha.

Resolução: Pelo caminho a :

$$\begin{aligned} \int_{(0,0)}^{(1,1)} (x^2 + y^2) d\vec{r} &= \int_{(0,0)}^{(1,1)} (x^2 + y^2) (\hat{e}_1 dx + \hat{e}_2 dy) = \\ &\hat{e}_1 \int_{(0,0)}^{(1,1)} (x^2 + y^2) dx + \hat{e}_2 \int_{(0,0)}^{(1,1)} (x^2 + y^2) dy = \\ &\hat{e}_1 \left[\int_{(0,0)}^{(0,1)} (0^2 + y^2) \underbrace{dx}_{=0} + \int_{(0,1)}^{(1,1)} (x^2 + 1^2) dx \right] + \\ &\hat{e}_2 \int_{(0,0)}^{(0,1)} (0^2 + y^2) dy + \int_{(0,1)}^{(1,1)} (x^2 + 1^2) \underbrace{dy}_{=0} = \\ &\hat{e}_1 \int_0^1 (x^2 + 1) dx + \hat{e}_2 \int_0^1 y^2 dy = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^1 \hat{e}_1 + \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 \hat{e}_2 \end{aligned}$$

Portanto, pelo caminho a ,

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x^2 + y^2) d\vec{r} = \frac{4}{3} \hat{e}_1 + \frac{1}{3} \hat{e}_2$$

Pelo caminho b :

$$\begin{aligned} & \int_{(0,0)}^{(1,1)} (x^2 + y^2) d\vec{r} = \\ & \hat{e}_1 \int_{(0,0)}^{(1,1)} (x^2 + y^2) dx + \hat{e}_2 \int_{(0,0)}^{(1,1)} (x^2 + y^2) dy = \\ & \hat{e}_1 \left[\int_{(0,0)}^{(1,0)} (x^2 + 0^2) dx + \int_{(1,0)}^{(1,1)} (1^2 + y^2) \underbrace{dx}_{=0} \right] + \\ & \hat{e}_2 \left[\int_{(0,0)}^{(1,0)} (x^2 + 0^2) \underbrace{dy}_{=0} + \int_{(1,0)}^{(1,1)} (1^2 + y^2) dy \right] = \\ & \hat{e}_1 \int_0^1 x^2 dx + \hat{e}_2 \int_0^1 (y^2 + 1) dy = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 \hat{e}_1 + \left(\frac{y^3}{3} + y \right) \Big|_0^1 \hat{e}_2 \end{aligned}$$

Portanto, pelo caminho b ,

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x^2 + y^2) d\vec{r} = \frac{1}{3} \hat{e}_1 + \frac{4}{3} \hat{e}_2$$

Pelo caminho c :

$$\begin{aligned} & \int_{(0,0)}^{(1,1)} (x^2 + y^2) d\vec{r} = \\ & \hat{e}_1 \int_{(0,0)}^{(1,1)} (x^2 + y^2) dx + \hat{e}_2 \int_{(0,0)}^{(1,1)} (x^2 + y^2) dy \end{aligned}$$

Mas, $y = x$ então,

$$\begin{aligned} & \int_{(0,0)}^{(1,1)} (x^2 + y^2) d\vec{r} = \\ & \hat{e}_1 \int_0^1 2y^2 dy + \hat{e}_2 \int_0^1 2y^2 dy = \frac{2y^3}{3} \Big|_0^1 \hat{e}_1 + \frac{2y^3}{3} \Big|_0^1 \hat{e}_2 \end{aligned}$$

Portanto, pelo caminho c ,

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x^2 + y^2) d\vec{r} = \frac{2}{3} \hat{e}_1 + \frac{2}{3} \hat{e}_2$$

Podemos observar, pelo Exemplo 6, que o resultado final depende do caminho escolhido.

2 - Consideremos a integral,

$$\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

onde \vec{A} é uma Função Vetorial. Então,

$$\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_C (A_x \hat{e}_1 + A_y \hat{e}_2 + A_z \hat{e}_3) \cdot (\hat{e}_1 dx + \hat{e}_2 dy + \hat{e}_3 dz)$$

Assim,

$$\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_C (A_x dx + A_y dy + A_z dz)$$

O valor de uma Integral de Linha é determinado pelo integrando e pela curva C entre dois pontos P_1 e P_2 . No entanto, sob certas condições, o valor de uma Integral de Linha depende apenas do integrando e dos pontos P_1 e P_2 , NÃO DEPENDENDO DO CAMINHO QUE OS LIGA. Dizemos que tal Integral de Linha INDEPENDENTE DO CAMINHO.

- Condições para a não dependência do caminho ou trajetória:

Para que,

$$\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

seja independente da trajetória, devemos ter,

$$\vec{A} \cdot d\vec{r} = d\phi \implies \int_A^B \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_A^B d\phi = \phi(B) - \phi(A)$$

Determinemos a Condição NECESSÁRIA E SUFICIENTE

$$\vec{A} \cdot d\vec{r} = A_x dx + A_y dy + A_z dz = d\phi$$

$$A_x dx + A_y dy + A_z dz = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz$$

Então,

$$A_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} ; \quad A_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} ; \quad A_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Assim,

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad e \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \implies \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \quad e \quad \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} \implies \frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} \quad e \quad \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} \implies \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial y}$$

Portanto,

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial y}$$

E, podemos escrever,

$$\begin{cases} \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

ou,

$$\nabla \times \vec{A} = 0$$

Portanto, se \vec{A} é uma Função Vetorial definida por,

$$\vec{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z) \hat{e}_1 + A_y(x, y, z) \hat{e}_2 + A_z(x, y, z) \hat{e}_3$$

e,

$$\vec{A}(x, y, z) = \nabla \phi(x, y, z) \tag{1.14}$$

Então, \vec{A} é denominado um CAMPO GRADIENTE, ϕ é denominada uma FUNÇÃO POTENCIAL e $\phi(x, y, z)$ é o POTENCIAL de \vec{A} em (x, y, z) .

Além disso, se \vec{A} é um campo de forças que satisfaz a Equação (1.14), então dizemos que \vec{A} é um CAMPO DE FORÇAS CONSERVATIVO.

EXEMPLO 7: Integrar a Função Vetorial $\vec{A} = 2xy\hat{e}_1 + x^2\hat{e}_2$ do ponto $(0, 0)$ ao ponto $(2, 4)$ seguindo os caminhos:

- ao longo do eixo x de $(0, 0)$ a $(2, 0)$ e paralelamente ao eixo y até $(2, 4)$;
- ao longo da reta que passa por ambos os pontos;
- ao longo da parábola $y = x^2$.

Resolução:

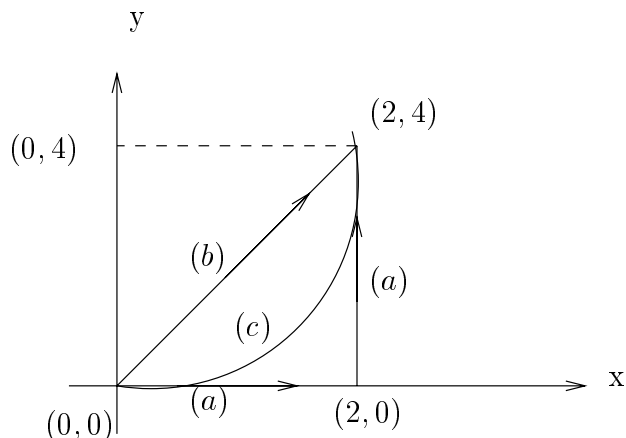


Figura 1.24: Exemplo 2 de Integral de Linha.

a)

$$I_a = \int_{(0,0)}^{(2,4)} (2xy dx + x^2 dy) = \int_{(0,0)}^{(2,0)} (2x \cdot 0 dx + x^2 \underbrace{dy}_{=0}) + \int_{(2,0)}^{(2,4)} (2 \cdot 2y \underbrace{dx}_{=0} + 2^2 dy) = 16$$

b)

$$I_b = \int_0^2 (2x \cdot 2x dx + x^2 \cdot 2 dx) = \int_0^2 (4x^2 + 2x^2) dx = 6 \int_0^2 x^2 dx = 16$$

c)

$$I_c = \int_0^2 (2x \cdot x^2 dx + x^2 \cdot 2x dx) = \int_0^2 (2x^3 + 2x^3) dx = 4 \int_0^2 x^3 dx = 16$$

Nesse caso, se tivéssemos observado que, como $\vec{A} = 2xy\hat{e}_1 + x^2\hat{e}_2$, então,

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (2xy) = 2x$$

e,

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2) = 2x$$

o que implica que \vec{A} é um campo gradiente, então $\exists \phi$ tal que $\vec{A} = \nabla\phi$ e assim,

$$A_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad e \quad A_y = \frac{\partial\phi}{\partial y}$$

Assim,

$$A_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} \implies \phi = \int A_x dx + \phi(y) = \int 2xy dx + \phi(y) = x^2 y + \phi(y) \implies$$

$$\phi = x^2 y + \phi(y) \quad (1.15)$$

e,

$$A_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \implies \phi = \int A_y dy + \phi(x) = \int x^2 dy + \phi(x) = x^2 y + \phi(x) \implies$$

$$\phi = x^2 y + \phi(x) \quad (1.16)$$

Comparando (1.15) e (1.16), temos que:

$$\phi(x) = \phi(y) = \text{constante} = \phi_o$$

Assim,

$$\phi(x, y) = x^2 y + \phi_o$$

Portanto, usando

$$\int_A^B \vec{A} \cdot d\vec{r} = \phi_B - \phi_A$$

onde,

$$\phi_B = \phi(B) = 16 + \phi_o \text{ e } \phi_A = \phi(A) = \phi_o$$

Então,

$$I = 16 + \phi_o - \phi_o \implies \int_{(0,0)}^{(2,4)} \vec{A} \cdot d\vec{r} = 16$$

Vimos assim que, quando a função vetorial \vec{A} é um Campo Gradiente, temos duas maneiras de calcular sua Integral de Linha: diretamente ou usando a Função Escalar ϕ que é o Potencial de \vec{A} .

B - Integral de Superfície:

A Integral de Superfície dada por,

$$\int_S \vec{A} \cdot d\vec{a}$$

pode ser interpretada como um fluxo através de uma dada superfície.

Integrais de Superfície aparecem com a mesma forma das Integrais de Linha. O elemento de área é também um vetor $d\vec{a}$, geralmente escrito como

$$d\vec{a} = \hat{n} da$$

onde \vec{n} é um vetor unitário indicando a direção positiva.

Por convenção, se a superfície é fechada, tomamos \hat{n} para fora como positiva. Se a superfície é aberta, o sinal depende da direção na qual o perímetro é percorrido, como mostra a Figura (1.25).

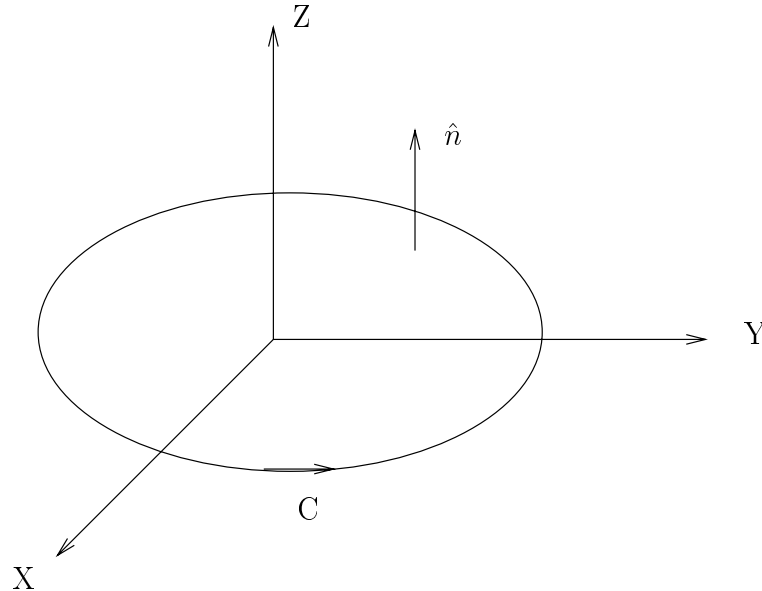


Figura 1.25: Convenção de sinal da normal \hat{n} .

Considerando a Figura (1.26), temos,

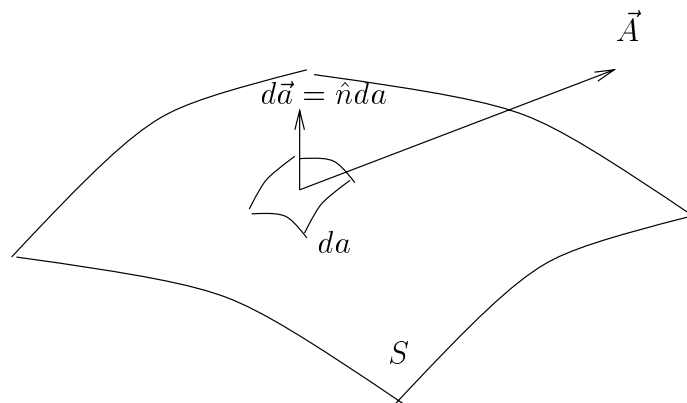


Figura 1.26: Elemento de área $d\vec{a}$.

$$d\vec{a} = \hat{n} da$$

$$\int_S \vec{A} \cdot d\vec{a} = \int_S \vec{A} \cdot \hat{n} da = \int_S \sum_i A_i da_i$$

C - Integral de Volume:

A integral de volume pode ser escrita como,

$$\int_V \vec{A} dV = \hat{e}_1 \int A_1 dV + \hat{e}_2 \int A_2 dV + \hat{e}_3 \int A_3 dV$$

D - Teorema de Gauss ou Teorema da Divergência:

Suponhamos que o vetor \vec{A} e $\nabla \cdot \vec{A}$ sejam contínuos sobre a região de interesse.

O Teorema de Gauss diz que,

$$\int_S \vec{A} \cdot d\vec{a} = \int_V \nabla \cdot \vec{A} dV$$

Sabemos que $\nabla \cdot \vec{A}$ pode ser interpretado como um fluxo de saída de um fluido por unidade de volume, isto é,

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A} dV$$

que é a taxa total de fluxo de fluido saindo do volume sobre o qual estamos integrando.

E - Teorema de Stokes:

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{a}$$

EXEMPLO 8: Calcular

$$\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \hat{n} da$$

para $\vec{A} = 3y\hat{e}_1 - xz\hat{e}_2 + yz^2\hat{e}_3$, onde S é a superfície do parabolóide $2z = x^2 + y^2$ limitado por $z = 2$ e C é o seu contorno.

Resolução: O contorno C de S é um círculo de equação $x^2 + y^2 = 4$, $z = 2$ e equações paramétricas:

$$x = 2 \cos t ; y = 2 \sin t ; z = 2 , 0 \leq t \leq 2\pi$$

Então,

$$\begin{aligned} \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \hat{n} da &= \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \oint_C (3y dx - xz dy + yz^2 dz) = \\ &= \int_{2\pi}^0 [3(2 \sin t)(-2 \sin t) dt - 2(\cos t)(2)(2)(\cos t) dt + 2(\sin t)(2^2)0] = \end{aligned}$$

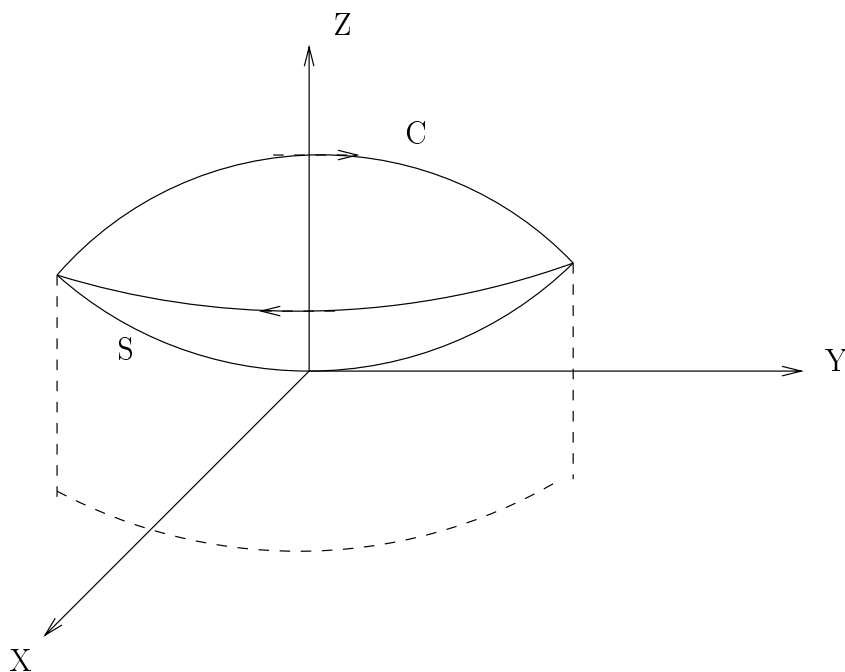


Figura 1.27: Exemplo 3.

$$\begin{aligned}
 -12 \int_{2\pi}^0 \sin^2 t \, dt - 8 \int_{2\pi}^0 \cos^2 t \, dt &= -6 \int_{2\pi}^0 (1 - \cos 2t) \, dt - 4 \int_{2\pi}^0 (1 + \cos 2t) \, dt = \\
 -10 \int_{2\pi}^0 dt + 2 \int_{2\pi}^0 \cos 2t \, dt &\implies \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = 20\pi
 \end{aligned}$$

ou,

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \vec{A} &= \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y & -xz & yz^2 \end{vmatrix} = \\
 &= \hat{e}_1 \left[\frac{\partial}{\partial y} (yz^2) - \frac{\partial}{\partial z} (-xz) \right] + \hat{e}_2 \left[\frac{\partial}{\partial z} (3y) - \frac{\partial}{\partial x} (yz^2) \right] + \hat{e}_3 \left[\frac{\partial}{\partial x} (-xz) - \frac{\partial}{\partial y} (3y) \right] = \\
 &= \hat{e}_1 (z^2 + x) + \hat{e}_3 (-z - 3) \implies \nabla \times \vec{A} = (x + z^2) \hat{e}_1 - (z + 3) \hat{e}_3
 \end{aligned}$$

Temos que,

$$\hat{n} = \frac{\nabla S}{|\nabla S|}$$

Mas,

$$\nabla S = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 - 2z) \hat{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 - 2z) \hat{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y^2 - 2z) \hat{e}_3 \implies$$

$$\nabla S = 2x \hat{e}_1 + 2y \hat{e}_2 - 2\hat{e}_3$$

e,

$$|\nabla S| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4} = 2\sqrt{x^2 + y^2 + 1}$$

Assim,

$$\hat{n} = \frac{2x \hat{e}_1 + 2y \hat{e}_2 - 2\hat{e}_3}{2\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \implies \hat{n} = \frac{x \hat{e}_1 + y \hat{e}_2 - \hat{e}_3}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$$

E,

$$(\nabla \times \vec{A}) \cdot \hat{n} = \frac{x(x + z^2) + z + 3}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$$

Também,

$$da = \frac{dx dy}{|\hat{n} \cdot \hat{k}|} = \frac{dx dy}{\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}} \implies da = \sqrt{x^2 + y^2 + 1} dx dy$$

Logo,

$$\begin{aligned} I &= \iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \hat{n} da = \iint_R \frac{x(x + z^2) + z + 3}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \sqrt{x^2 + y^2 + 1} dx dy = \\ &= \iint_R [x^2 + xz^2 + z + 3] dx dy = \iint_R [x^2 + x(x^2 + y^2)^2 + \frac{x^2 + y^2}{2} + 3] dx dy \end{aligned}$$

Fazendo $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ e $dx dy = r dr d\theta$, então,

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r^2 \cos^2 \theta + r \cos \theta \frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2} + 3) r dr d\theta \implies I = 20\pi$$

1.4 Problemas Propostos

1) Encontre a matriz transformação que gira o eixo x_3 de um sistema de coordenadas retangulares de 45° na direção de x_1 em torno do eixo x_2 .

2) Para os dois vetores:

$$\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k} \text{ e } \vec{B} = -2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$$

encontre:

a) $\vec{A} - \vec{B}$ e $|\vec{A} - \vec{B}|$;

b) a componente de \vec{B} ao longo de \vec{A} ;

c) o ângulo entre \vec{A} e \vec{B} ;

d) $\vec{A} \times \vec{B}$;

e) $(\vec{A} - \vec{B}) \times (\vec{A} + \vec{B})$

3) Uma partícula move-se em uma órbita plana elíptica descrita pelo vetor posição

$$\vec{r} = 2b \sin \omega t \hat{i} + b \cos \omega t \hat{j}$$

a) Encontre \vec{v} , \vec{a} , e a velocidade da partícula;

b) Qual é o ângulo entre \vec{v} e \vec{a} no instante $t = \frac{\pi}{2\omega}$?

4) Se \vec{X} é um vetor desconhecido satisfazendo às seguintes relações envolvendo os vetores conhecidos \vec{A} e \vec{B} e o escalar ϕ ,

$$\vec{A} \times \vec{X} = \vec{B} ; \vec{A} \cdot \vec{X} = \phi$$

Expresse \vec{X} em termos de \vec{A} , \vec{B} , ϕ , e o módulo de \vec{A} .

5) Considere as seguintes matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Encontre:

a) $|\mathbf{A} \mathbf{B}|$;

b) $\mathbf{A} \mathbf{C}$;

c) $\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{C}$;

d) $\mathbf{A} \mathbf{B} - \mathbf{B}^t \mathbf{A}^t$.

6) Encontre os valores de α necessários para que a seguinte transformação seja ortogonal.

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\alpha \\ 0 & \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

7) Mostre que:

a)

$$\sum_{i,j} \varepsilon_{ijk} \delta_{ij} = 0$$

b)

$$\sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ljk} = 2 \delta_{il}$$

c)

$$\sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6$$

8) Seja \vec{A} um vetor arbitrário, e seja \vec{e} um vetor unitário em alguma direção fixa. Mostre que

$$\vec{A} = \vec{e}(\vec{A} \cdot \vec{e}) + \vec{e} \times (\vec{A} \times \vec{e})$$

Qual é o significado geométrico de cada um dos dois termos da expansão?

9) Uma partícula move-se com velocidade $v = cte$ ao longo da curva $r = k(1 + \cos \theta)$ (a cardióide). Encontre:

a) $\vec{r} \cdot \hat{e}_r = \vec{a} \cdot \hat{e}_r$;

b) $|\vec{a}|$;

c) $\dot{\theta}$.

10) Se \vec{r} e $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ são ambas funções explícitas do tempo, mostre que:

$$\frac{d}{dt} [\vec{r} \times (\vec{v} \times \vec{r})] = r^2 \vec{a} - (\vec{r} \cdot \vec{v}) \vec{v} - (v^2 + \vec{r} \cdot \vec{a}) \vec{r}$$

11) Mostrar que:

$$\nabla(\ln |\vec{r}|) = \frac{\vec{r}}{r^2}$$

12) Mostrar que $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$

13) Mostre que:

a) $\nabla r^n = n r^{n-2} \vec{r}$

b) $\nabla f(r) = \frac{\vec{r}}{r} \frac{df}{dr}$

c) $\nabla^2(\ln r) = \frac{1}{r^2}$

14) Mostre que:

$$\int (2a \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} + 2b \dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}) dt = ar^2 + b\dot{r}^2 + cte$$

onde \vec{r} é o vetor da origem ao ponto (x_1, x_2, x_3) . As quantidades r e \dot{r} são os módulos dos vetores \vec{r} e $\dot{\vec{r}}$, respectivamente, e a e b são constantes.

15) Mostre que

$$\int \left(\frac{\vec{r}}{r} - \frac{\vec{r}\dot{r}}{r^2} \right) dt = \frac{\vec{r}}{r} + \vec{C}$$

onde \vec{C} é um vetor constante.

16) Avalie a integral $\int \vec{A} \times \vec{A} dt$

17) Encontre o valor da integral $\int_S \vec{A} \cdot d\vec{a}$, onde $\vec{A} = x\hat{i} - y\hat{j} + z\hat{k}$ e S é a superfície fechada definida pelo caminho $c^2 = x^2 + y^2$. O topo e a base do cilindro estão em $z = d$ e $z = 0$, respectivamente.

18) Encontre o valor da integral $\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{a}$ se o vetor $\vec{A} = y\hat{i} + z\hat{j} + x\hat{k}$ e S é a superfície definida pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$, onde $z \geq 0$.

19) Se $S(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$, encontre:

a) ∇S em $P = (1, 2, 3)$;

b) A intensidade do gradiente de S em $P = (1, 2, 3)$;

c) Os cossenos diretores do gradiente de S em $P = (1, 2, 3)$.

20) a) Encontre um vetor unitário perpendicular à superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ no ponto $Q = (1, 1, 1)$;

b) Deduza a equação do plano tangente à superfície no ponto $Q = (1, 1, 1)$.

21) Encontre um vetor \vec{A} que seja perpendicular aos vetores $\vec{U} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ e $\vec{V} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$;

22) Para uma partícula movendo-se numa órbita circular $\vec{r} = r \cos(\omega t) \hat{i} + r \sin(\omega t) \hat{j}$, onde r e ω são constantes.

a) Avalie $\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$;

b) Mostre que $\ddot{\vec{r}} + \omega^2 \vec{r} = 0$.

23) Encontre o trabalho feito em torno do círculo unitário no plano xy por um campo de força dado por $F = -\frac{y}{(x^2 + y^2)} \hat{i} + \frac{x}{(x^2 + y^2)} \hat{j}$:

a) no sentido antihorário de 0 a π ;

b) no sentido horário de 0 a $-\pi$.

24) Calcule o trabalho necessário para ir do ponto $A = (1, 1)$ ao ponto $B = (3, 3)$. A força exercida é dada por $F = (x - y) \hat{i} + (x + y) \hat{j}$. Especifique claramente dois caminhos escolhidos e justifique as respostas obtidas.

1.5 Expansões e Expressões Importantes

No sistema de Coordenadas Esféricas, o gradiente, o divergente, o rotacional e o Laplaciano são escritos da seguinte maneira:

$$\nabla \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \hat{e}_\phi$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{e}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \sin \theta \frac{\partial (r A_\phi)}{\partial r} \right] \hat{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{e}_\phi$$

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2}$$

As expansões mais comuns são dadas a seguir:

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots + \binom{n}{r} x^r ; |x| < 1$$

$$(1 - x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots + (-1)^r \binom{n}{r} x^r ; -|x| < 1$$

onde,

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

é o coeficiente binomial.

Assim,

$$(1 \pm x)^{1/2} = 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \pm \frac{1}{16}x^3 - + \dots$$

$$(1 \pm x)^{1/3} = 1 \pm \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 \pm \frac{5}{81}x^3 - + \dots$$

$$(1 \pm x)^{-1/2} = 1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 \mp \frac{5}{16}x^3 + - \dots$$

$$(1 \pm x)^{-1} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + \dots$$

$$(1 \pm x)^{-2} = 1 \mp 2x + 3x^2 \mp 4x^3 + \dots$$

$$(1 \pm x)^{-3} = 1 \mp 3x + 6x^2 \mp 10x^3 + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad ; \quad |x| < 1$$

Algumas relações que transformam produtos de senos e cossenos em soma e diferença são úteis. As mais utilizadas são:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) - \cos(A+B)] \\ \sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A-B) + \sin(A+B)] \\ \cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) + \cos(A+B)] \end{array} \right.$$

Também é importante e interessante saber as definições das funções trigonométricas e hiperbólicas, isto é,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad ; \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad ; \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array} \right.$$

As seguintes integrais são muito comuns e é conveniente tê-las à mão:

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \quad ; \quad \int \frac{x dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{2} \ln(a^2 + x^2) \quad ; \quad \int \frac{x dx}{x(a^2 + x^2)} = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{x^2}{a^2 + x^2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 x^2 - b^2} = \frac{1}{2ab} \ln \left(\frac{ax - b}{ax + b} \right) = -\frac{1}{ab} \operatorname{coth}^{-1} \left(\frac{ax}{b} \right) ; a^2 x^2 < b^2$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b} \sqrt{a+bx} ; \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln \left(x + \sqrt{x^2+a^2} \right)$$
$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{a} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} ; \int \tan x dx = -\ln |\cos x| ;$$
$$\int e^{ax} \sin x dx = \frac{e^{ax}}{a^2+1} (a \sin x - \cos x) ; \int \tanh x dx = \ln \cosh x$$

2

Mecânica de Newton

2.1 Introdução

Historicamente, a Mecânica foi o primeiro ramo da Física a ser desenvolvido como uma ciência exata. O grande desenvolvimento da Física começou quando Galileu e Newton descobriram as Leis da Mecânica. Estas leis, segundo formulação de ISAAC NEWTON, em meados do sec. XVII, e as Leis da Eletricidade e Magnetismo, segundo JAMES CLERCK MAXWELL, aproximadamente 200 anos depois, são as duas teorias da Física Clássica. A Física Relativística, iniciada com o trabalho de Einstein, em 1905, e a Física Quântica, fundamentada nos trabalhos de Heisenberg e Schroedinger, em 1925 - 1926, contribuíram para modificar e reformular a Mecânica e a Eletrodinâmica Clássicas para estudar as Físicas Relativística e Quântica. Além disso, na maioria das aplicações práticas da Mecânica, em vários ramos da Engenharia e da Astronomia, as Leis da Mecânica Clássica são ainda válidas. Excetuando-se os casos em que os corpos viajam com velocidades próximas à da luz ou quando há envolvimento de massas e distâncias muito grandes, a Mecânica Relativística fornece os mesmos resultados que a Clássica. Similarmente, a Mecânica Quântica deve e realmente concorda com a Clássica, exceto quando é aplicada a sistemas de tamanho molecular ou menores.

Na realidade, um dos principais princípios usados como guia na formulação de novas teorias da Física é a imposição de que elas devam concordar com as teorias antigas quando aplicadas aos fenômenos para os quais as mais antigas fornecem o resultado correto.

A Mecânica é o estudo dos movimentos de corpos materiais e pode ser dividida em três subdisciplinas: Cinemática, Dinâmica e Estática.

1. CINEMÁTICA - É o estudo e a descrição dos possíveis movimentos de corpos materiais.

2. DINÂMICA - É o estudo das leis que determinam, entre todos os possíveis movimentos, aquele que realmente ocorrerá em cada caso específico. O problema central da Dinâmica é determinar, para qualquer sistema físico, os movimentos que ocorrerão sob a ação de uma

dada força.

3. ESTÁTICA - É o estudo de forças e sistemas de forças, com referência particular aos que atuam sobre corpos em equilíbrio.

O estudo da Mecânica pode também ser subdividido de acordo com a espécie de sistema a ser estudado: movimento de uma partícula, movimento de um sistema de partículas e corpos rígidos.

2.2 Leis de Newton

Grande número de aplicações da Mecânica Clássica baseia-se diretamente nas leis do movimento de Newton. Entretanto, existem outras maneiras de formular os Princípios da Mecânica Clássica, por exemplo, as Equações de Lagrange e de Hamilton. Elas não são teorias novas, pois derivam-se das Leis de Newton, mas são formas diferentes de expressar a mesma teoria, por meio de conceitos matemáticos mais avançados. Em muitos aspectos, são mais elegantes do que a formulação Newtoniana e, em alguns casos, mais poderosas, porque permitem uma solução de alguns problemas que, se baseada diretamente nas Leis de Newton, seria muito difícil.

Isaac Newton foi o primeiro a formular de maneira completa as três Leis da Mecânica, enunciando-as da seguinte forma:

1ª - *Todo corpo permanece em estado de repouso ou de movimento uniforme, em linha reta, a menos que seja obrigado a mudá-lo por forças aplicadas sobre ele.*

2ª - *A taxa de variação do Momento Linear é proporcional à força aplicada, e na direção em que a força age, isto é,*

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} .$$

3ª - *Para cada ação existe uma reação igual e oposta.*

2.3 Sistemas de Referência

Newton percebeu que, para as Leis do movimento terem significado, o movimento dos corpos deveria ser medido relativo a algum Sistema de Referência. Um Sistema Referencial é chamado um REFERENCIAL INERCIAL se as Leis de Newton são, de fato, válidas nesse referencial; isto é, se um corpo sujeito à nenhuma força externa move-se em uma linha reta com velocidade constante (ou permanece em repouso), então o sistema de coordenadas estabelecendo este fato é um Sistema Referencial Inercial.

Se as Leis de Newton são válidas em um sistema de referência, então elas são também válidas em qualquer sistema de referência em movimento uniforme (isto é, não acelerado) com relação ao primeiro sistema. Este é um resultado do fato que a equação,

$$\vec{F} = m \vec{r}'' ,$$

envolve a segunda derivada temporal de \vec{r} : A variação de coordenadas envolvendo uma

velocidade constante não influi na equação. Este resultado é chamado “INVARIÂNCIA DE GALILEU” ou o “PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE NEWTONIANA”.

A Teoria da Relatividade tem mostrado que os conceitos de “REPOUSO ABSOLUTO” e “SISTEMA DE REFERENCIAL ABSOLUTO” não tem sentido. Portanto, ainda quando convencionalmente adotamos um referencial descrito com relação às estrelas *fixas* - e, de fato, em um tal referencial as Equações de Newton são válidas com um alto grau de precisão - um tal referencial não é, de fato, um Referencial Inercial Absoluto. Podemos, portanto, considerar as estrelas *fixas* para definir um Sistema Referencial que se aproxima de um Sistema Inercial Absoluto de modo satisfatório para os nossos propósitos.

2.4 A Equação de Movimento de uma Partícula

Um dos problemas mais simples é o que se refere ao movimento de um corpo que se move em linha reta, sendo submetido à ação de uma força constante. Se a massa do corpo for m e a força F , tem-se, de acordo com a 2^a Lei de Newton,

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(mv) = m \frac{dv}{dt} \implies F = ma \implies a = \frac{F}{m},$$

mas,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m},$$

logo,

$$dv = \frac{F}{m} dt \implies \int_{v_0}^v dv = \frac{F}{m} \int_0^t dt \implies v = v_0 + \frac{F}{m} t,$$

também,

$$v = \frac{dx}{dt} \implies dx = v dt \implies dx = \left(v_0 + \frac{F}{m} t\right) dt,$$

então,

$$\int_{x_0}^x dx = v_0 \int_0^t dt + \frac{F}{m} \int_0^t t dt \implies x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2.$$

Examinaremos vários exemplos em que a função força é conhecida (constante ou dependente apenas de uma das variáveis: r , v ou t).

EXEMPLO 1: Um bloco desliza para baixo, sem atrito, sobre um plano inclinado fixo. Qual é a aceleração do bloco? E sua velocidade?

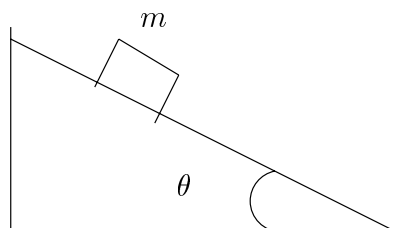


Figura 2.1: Exemplo 1.

Resolução:

$$N - P_y = 0 \implies N = P \cos \theta ,$$

$$P_x = m \ddot{x} \implies m g \sin \theta = m \ddot{x} \implies \ddot{x} = g \sin \theta .$$

Então, multiplicando a última expressão por $2 \dot{x}$, encontramos,

$$2 \dot{x} \ddot{x} = 2 g \dot{x} \sin \theta \implies \frac{d}{dt} (\dot{x}^2) = 2 g \sin \theta \frac{dx}{dt} \implies \int_{v_0}^v d(\dot{x}^2) = 2 g \sin \theta \int_0^x dx .$$

Portanto,

$$\dot{x}^2 \Big|_{v_0}^v = 2 g \sin \theta x \Big|_0^x \implies v^2 - v_0^2 = 2 g x \sin \theta ,$$

e assim,

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2 g x \sin \theta} .$$

EXEMPLO 2: Se o coeficiente de atrito estático entre o bloco e o plano inclinado, no exemplo anterior, é μ_s , a que ângulo θ_c o bloco começa a deslizar se está inicialmente em repouso?

Resolução:

$$N = P \cos \theta ; P_x - f_s = m \ddot{x} ,$$

onde,

$$f_s \leq f_{s_{max}} = \mu_s N .$$

Na IMINÊNCIA DE MOVIMENTO,

$$\ddot{x} = 0 \text{ e } f_s = f_{s_{max}} .$$

Então,

$$m g \sin \theta_c - \mu_s m g \cos \theta_c = 0 \implies \theta_c = \arctan \mu_s .$$

EXEMPLO 3: Após o bloco do exemplo anterior começar a deslizar, o coeficiente de atrito torna-se μ_k . Encontre a aceleração para o ângulo θ .

Resolução:

$$N = P_y \implies N = m g \cos \theta ,$$

e,

$$f_k = \mu_k N = \mu_k m g \cos \theta .$$

Então,

$$P_x - f_k = m \ddot{x} \implies m g \sin \theta - \mu_k m g \cos \theta = m \ddot{x} .$$

Assim,

$$\ddot{x} = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta) .$$

EXEMPLO 4: Encontre o deslocamento e a velocidade do movimento horizontal em um meio em que a força resistiva é proporcional à velocidade, isto é, $F_R = m k v$, onde k é constante. Despreze forças gravitacionais.

Resolução:

$$m a = m \frac{dv}{dt} = -m k v \implies \frac{dv}{v} = -k dt \implies \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -k \int_0^t dt ,$$

então,



Figura 2.2: Exemplo 4.

$$\ln v - \ln v_o = -k t \implies \ln \frac{v}{v_o} = -k t .$$

Assim,

$$v = v_o e^{-k t} ,$$

porém,

$$v = \frac{dx}{dt} = v_o e^{-k t} \implies dx = v_o e^{-k t} dt ,$$

e, portanto,

$$x = \frac{v_o}{k} (1 - e^{-k t}) .$$

Observe que, quando $t \rightarrow \infty$, $x \rightarrow \frac{v_o}{k}$ que é finito.

Calculemos também $v = f(x)$.

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} \implies a = v \frac{dv}{dx} \implies -k v = v \frac{dv}{dx} \implies \int_{v_o}^v v dv = -k \int_0^x dx ,$$

e assim,

$$v = v_o - k x .$$

Portanto, a velocidade decresce linearmente com o deslocamento.

EXEMPLO 5: Encontre o deslocamento e a velocidade de uma partícula com movimento vertical descendente em um meio tendo uma força resistiva proporcional à velocidade, isto é, $F_R = m k v$, onde k é constante.

Resolução:

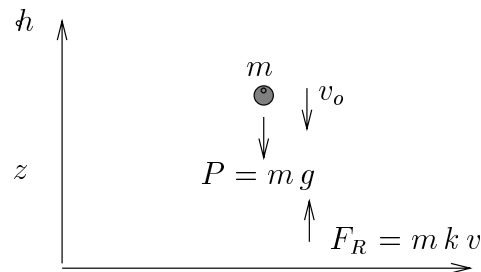


Figura 2.3: Exemplo 5.

$$m \frac{dv}{dt} = -m g - m k v \implies \frac{dv}{dt} = -(k v + g) \implies \frac{dv}{k v + g} = -dt ,$$

então,

$$\int_{v_o}^v \frac{dv}{k v + g} = - \int_0^t dt ,$$

e,

$$\ln(k v + g) - \ln(k v_o + g) = -k t \implies \frac{k v + g}{k v_o + g} = e^{-k t} .$$

Assim,

$$v = -\frac{g}{k} + \left(\frac{k v_o + g}{k} \right) e^{-k t} .$$

Observe que, quando $t \rightarrow \infty$, $v \rightarrow -\frac{g}{k}$, que é denominada de VELOCIDADE TERMINAL.

Também,

$$v = \frac{dz}{dt} \implies dz = v dt \implies dz = -\frac{g}{k} dt + \frac{(k v_o + g)}{k} e^{-k t} dt .$$

Assim,

$$\int_h^z dz = -\frac{g}{k} \int_0^t dt + \frac{k v_o + g}{k} \int_0^t e^{-k t} dt .$$

Portanto,

$$z = h - \frac{g}{k} t + \frac{k v_o + g}{k^2} (1 - e^{-k t}) .$$

EXEMPLO 6: Seja a velocidade de lançamento de um projétil, v_o , e o ângulo de lançamento, θ . Calcule o deslocamento, a velocidade e o alcance do projétil.

Resolução:

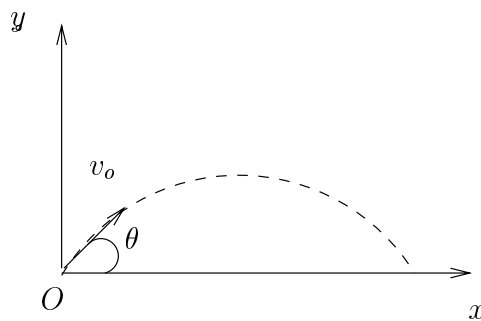


Figura 2.4: Exemplo 6.

Na direção x :

$$m \ddot{x} = 0 \implies \ddot{x} = 0 \implies \dot{x} = v_o \cos \theta \implies x = v_o t \cos \theta .$$

Na direção y :

$$m \ddot{y} = -m g \implies \ddot{y} = -g \implies \frac{d\dot{y}}{dt} = -g \implies \dot{y} = \dot{y}_o - g t .$$

Mas,

$$\dot{y}_o = v_o \sin \theta ,$$

então,

$$\dot{y} = v_o \sin \theta - g t .$$

Assim,

$$\frac{dy}{dt} = v_o \sin \theta - g t \implies y = v_o t \sin \theta - \frac{g t^2}{2} .$$

Como,

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \implies v = \sqrt{v_o^2 + g^2 t^2 - 2 v_o g t \sin \theta} ,$$

e,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \implies r = \sqrt{v_o^2 t^2 + \frac{g^2 t^4}{4} - v_o g t^3 \sin \theta} .$$

O projétil atinge o solo quando $y = 0$. Logo,

$$v_o t \sin \theta - \frac{g t^2}{2} = 0 \implies t \left(v_o \sin \theta - \frac{g t}{2} \right) = 0 .$$

Temos assim, $t = 0$ que é o início; ou,

$$t = T = \frac{2 v_o \sin \theta}{g} ,$$

que é o tempo de voo.

Então, o alcance R será dado por,

$$R = x(t = T) \implies R = v_o T \cos \theta \implies R = \frac{v_o^2 \sin 2\theta}{g} .$$

EXEMPLO 7: Resolva o problema anterior supondo que exista uma força resistiva diretamente proporcional à velocidade do projétil ($\vec{F} = m k \vec{v}$).

Resolução:

Temos para as condições iniciais:

$$x(0) = y(0) = 0$$

$$\dot{x}(0) = v_o \cos \theta = U$$

$$\dot{y}(0) = v_o \sin \theta = V$$

As equações dos movimentos são:

$$\begin{cases} m \ddot{x} = -m k \dot{x} \\ m \ddot{y} = -m k \dot{y} - m g \end{cases} \quad (2.1)$$

Da primeira equação de (2.1) temos,

$$\ddot{x} = -k \dot{x} \implies \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -k dt \implies \dot{x} = U e^{-k t} .$$

Integrando novamente, obtemos,

$$dx = U e^{-kt} dt \implies x = \frac{U}{k} (1 - e^{-kt})$$

Da segunda equação de (2.1) temos,

$$\ddot{y} = -k \dot{y} - g \implies \frac{d\dot{y}}{k \dot{y} + g} = -dt \implies \ln(k \dot{y} + g) - \ln(k \dot{y}_0 + g) = -kt,$$

e assim,

$$\dot{y} = -\frac{g}{k} + \frac{kV + g}{k} e^{-kt}.$$

Integrando novamente, obtemos,

$$dy = -\frac{g}{k} dt + \frac{kV + g}{k} e^{-kt} dt \implies y = -\frac{g}{k} t + \left(\frac{kV + g}{k^2} \right) (1 - e^{-kt}).$$

Quando $y = 0$, $t = T$, então,

$$-\frac{g}{k} T + \left(\frac{kV + g}{k^2} \right) (1 - e^{-kT}) = 0 \implies T = \frac{kV + g}{kg} (1 - e^{-kT})$$

Esta é uma EQUAÇÃO TRANSCENDENTAL, e portanto não pode ser obtida uma expressão analítica para T . Para resolvermos este problema, usaremos o MÉTODO DA PERTURBAÇÃO, considerando $k \ll$. Fazendo a expansão:

$$e^{-kT} = 1 - kT + \frac{1}{2!} k^2 T^2 - \frac{1}{3!} k^3 T^3 + \dots$$

Logo,

$$1 - e^{-kT} = kT - \frac{1}{2} k^2 T^2 + \frac{1}{6} k^3 T^3 - + \dots$$

Assim,

$$T \simeq \frac{kV + g}{kg} (kT - \frac{1}{2} k^2 T^2 + \frac{1}{6} k^3 T^3 - + \dots)$$

Considerando termos até k^3 , temos,

$$T \simeq \frac{kV + g}{kg} kT (1 - \frac{1}{2} kT + \frac{1}{6} k^2 T^2).$$

Assim,

$$1 = \frac{kV + g}{g} (1 - \frac{1}{2} kT + \frac{1}{6} k^2 T^2) \implies \frac{g}{kV + g} = 1 - \frac{1}{2} kT + \frac{1}{6} k^2 T^2 \implies T = \frac{2V/g}{1 + \frac{kV}{g}} + \frac{1}{3} kT^2.$$

Mas,

$$\frac{1}{1 + \frac{kV}{g}} = 1 - \left(\frac{kV}{g} \right) + \left(\frac{kV}{g} \right)^2 + \dots \cong 1 - \frac{kV}{g} + O(k^2).$$

Assim,

$$T \cong \frac{2V}{g} \left(1 - \frac{kV}{g} + O(k^2)\right) + \frac{1}{3} k T^2 \implies T \cong \frac{2V}{g} + \left(\frac{T^2}{3} - \frac{2V^2}{g^2}\right) k + O(k^2).$$

Quando $k \rightarrow 0$, então,

$$T = \frac{2V}{g} = \frac{2v_o \sin \theta}{g} = T_o.$$

Portanto, se k é pequeno, o tempo de vôo será, aproximadamente, T_o . Assim, substituindo a expressão de T_o no lugar de T , para encontrar a correção de primeira ordem no tempo de vôo, obtemos,

$$T \cong \frac{2V}{g} + \left(\frac{4V^2}{3g^2} - \frac{2V^2}{g^2}\right) k \implies T \cong \frac{2V}{g} \left(1 - \frac{kV}{3g}\right),$$

que é a expressão aproximada para o tempo de vôo. Como

$$x = \frac{U}{k} (1 - e^{-kt}),$$

mas,

$$e^{-kt} = 1 - kt + \frac{1}{2} k^2 t^2 - \frac{1}{6} k^3 t^3 + \dots,$$

então,

$$x \cong \frac{U}{k} \left(1 - 1 + kt - \frac{1}{2} k^2 t^2 + \frac{1}{6} k^3 t^3\right) + \dots.$$

Logo,

$$x \cong U \left(t - \frac{1}{2} k t^2 + \frac{1}{6} k^2 t^3\right) + \dots.$$

Assim,

$$R' = U \left(T - \frac{1}{2} k T^2 + \frac{1}{6} k^2 T^3\right) + \dots \implies R' \cong U \left(T - \frac{1}{2} k T^2\right),$$

mas,

$$T = \frac{2V}{g} \left(1 - \frac{kV}{3g}\right).$$

Então,

$$R' \cong \frac{2UV}{g} \left(1 - \frac{4kV}{3g}\right).$$

Mas,

$$R = \frac{2UV}{g}.$$

Logo,

$$R' = R \left(1 - \frac{4kV}{3g}\right).$$

Para que faixa de valores de k nosso método perturbativo estará correto??? Observando a expansão, $\frac{1}{1 + \frac{kV}{g}}$ temos que ela converge se

$$k \ll \frac{g}{V}.$$

Assim,

$$k \ll \frac{g}{v_o \sin \theta} .$$

EXEMPLO 8: A máquina de Atwood consiste de uma polia lisa com duas massas suspensas de uma corda leve presas nas suas extremidades. Encontre a aceleração das massas e a tensão na corda quando:

- A polia está em repouso;
- A polia está em um elevador que desce com aceleração constante α .

Resolução: a)

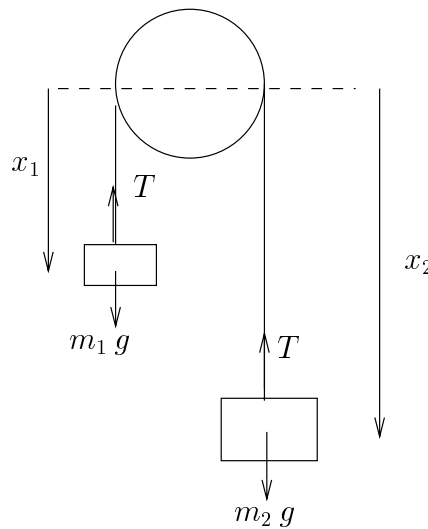


Figura 2.5: Exemplo 8a.

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g - T \\ m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g - T \\ \ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1 \end{cases} ,$$

então,

$$\begin{cases} T = m_1 g - m_1 \ddot{x}_1 \\ T = m_2 g - m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g + m_2 \ddot{x}_1 \end{cases} .$$

Assim,

$$\ddot{x}_1 = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} g = -\ddot{x}_2 ,$$

e,

$$T = \frac{2 m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} .$$

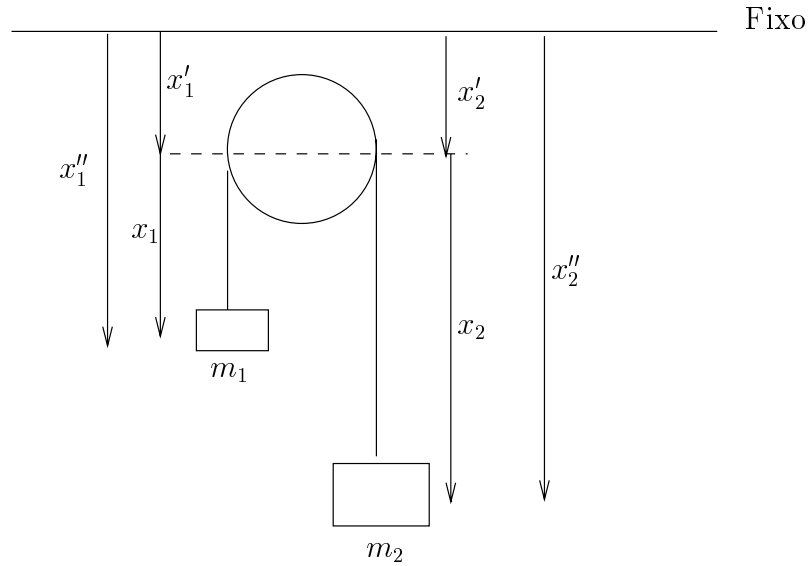


Figura 2.6: Exemplo 8b.

b) Pela Figura (2.6), temos que,

$$x_1'' = x_1' + x_1 \quad \text{e} \quad x_2'' = x_2' + x_2 .$$

Logo,

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1'' = m_1 \ddot{x}_1' + m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g - T \\ m_2 \ddot{x}_2'' = m_2 \ddot{x}_2' + m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g - T \end{cases} .$$

Mas,

$$\ddot{x}_1' = \ddot{x}_2' = \alpha \quad \text{e} \quad \ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1 ,$$

então,

$$\begin{cases} m_1 (\alpha + \ddot{x}_1) = m_1 g - T \\ m_2 (\alpha - \ddot{x}_1) = m_2 g - T \end{cases} ,$$

e, portanto,

$$\ddot{x}_1 = (g - \alpha) \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} = -\ddot{x}_2 ,$$

e, finalmente,

$$T = 2(g - \alpha) \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} .$$

EXEMPLO 9: Considere uma partícula carregada entrando numa região de campo magnético uniforme B_o - por exemplo o campo da Terra - como mostra a Figura (2.7). Determine seu movimento.

Resolução:

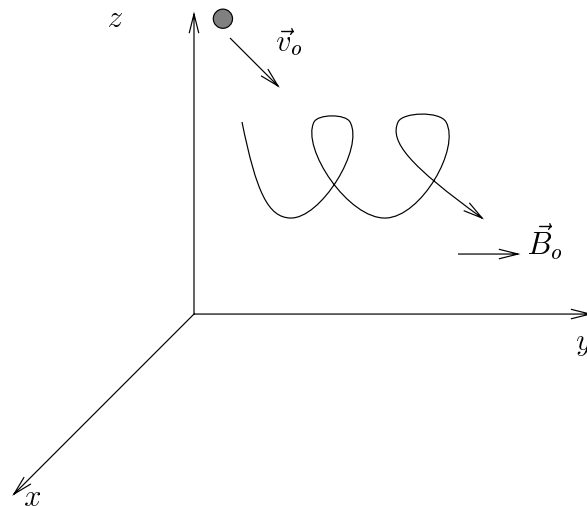


Figura 2.7: Exemplo 9.

Temos que:

$$\vec{v} = \dot{x} \hat{i} + \dot{y} \hat{j} + \dot{z} \hat{k},$$

$$\vec{a} = \ddot{x} \hat{i} + \ddot{y} \hat{j} + \ddot{z} \hat{k},$$

e,

$$\vec{B} = B_0 \hat{j}.$$

Como,

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} = m \vec{a},$$

e,

$$\vec{v} \times \vec{B} = \dot{x} B_0 \hat{k} - \dot{z} B_0 \hat{i},$$

então,

$$q (\dot{x} B_0 \hat{k} - \dot{z} B_0 \hat{i}) = m \ddot{x} \hat{i} + m \ddot{y} \hat{j} + m \ddot{z} \hat{k}.$$

Assim,

$$\begin{cases} m \ddot{x} = -q B_0 \dot{z} \\ m \ddot{y} = 0 \\ m \ddot{z} = q B_0 \dot{x} \end{cases} . \quad (2.2)$$

Da segunda equação de (2.2), obtemos,

$$\ddot{y} = 0 \implies \dot{y} = \dot{y}_0 = cte \implies y = \dot{y}_0 t + y_0$$

onde, $y_0 = cte$

Da primeira equação em (2.2), obtemos,

$$\ddot{x} = -\frac{q B_0}{m} \dot{z} \implies \ddot{x} = -\frac{q B_0}{m} \dot{z}.$$

Da terceira equação em (2.2), obtemos,

$$\ddot{z} = -\frac{qB_o}{m}\dot{x} \implies \ddot{z} = \frac{qB_o}{m}\ddot{x} \implies \ddot{z} = -\left(\frac{qB_o}{m}\right)^2 \dot{z}.$$

Retornando à equação para \ddot{x} , podemos escrever,

$$\ddot{x} = -\left(\frac{qB_o}{m}\right)^2 \dot{x}$$

Seja $\frac{qB_o}{m} = \alpha$. Logo,

$$\ddot{x} = -\alpha^2 \dot{x},$$

e,

$$\ddot{z} = -\alpha^2 \dot{z}.$$

Resolvamos a equação em x pois a em z é semelhante.

$$\ddot{x} + \alpha^2 \dot{x} = 0 \implies m^3 + \alpha m = 0 \implies m = 0 \text{ ou } m = \pm i\alpha.$$

Portanto,

$$x = C_1 e^0 + C_2 e^{i\alpha t} + C_3 e^{-i\alpha t} = C_1 + C_2 e^{i\alpha t} + C_3 e^{-i\alpha t}.$$

Assim,

$$x = A \cos \alpha t + B \sin \alpha t + C_1,$$

como, $x(0) = x_o + A = X_o \implies C_1 = X_o$, então,

$$x = A \cos \alpha t + B \sin \alpha t + X_o,$$

e, de maneira análoga,

$$z = A' \cos \alpha t + B' \sin \alpha t + Z_o,$$

onde $Z_o = z_o + A'$

Como,

$$\ddot{x} = -\alpha \dot{z},$$

e,

$$\dot{x} = -\alpha A \sin \alpha t + \alpha B \cos \alpha t,$$

então,

$$\ddot{x} = -\alpha^2 A \cos \alpha t - \alpha^2 B \sin \alpha t = -\alpha^2 (A \cos \alpha t + B \sin \alpha t),$$

e assim,

$$\dot{z} = -\alpha A' \sin \alpha t + \alpha B' \cos \alpha t = -\alpha (A' \sin \alpha t - B' \cos \alpha t).$$

Portanto,

$$-\alpha^2 (A \cos \alpha t + B \sin \alpha t) = -\alpha (A' \sin \alpha t - B' \cos \alpha t) \implies A = B' \text{ e } B = -A'.$$

Logo,

$$x = A \cos \alpha t + B \sin \alpha t + X_o \implies x - X_o = A \cos \alpha t + B \sin \alpha t,$$

$$y = y_o + \dot{y}_o t \implies y - y_o = \dot{y}_o t,$$

e,

$$z = -B \cos \alpha t + A \sin \alpha t + Z_o \implies z - Z_o = -B \cos \alpha t + A \sin \alpha t .$$

Se para $t = 0$ $\dot{z} = \dot{z}_o$ e $\dot{x} = 0$, então,

$$0 = -\alpha A \sin 0 + \alpha B \cos 0 \implies B = 0 ,$$

e,

$$\dot{z}_o = -\alpha A' \sin 0 + \alpha B' \cos 0 \implies B' = \frac{\dot{z}_o}{\alpha} .$$

Como $A = B'$, então, $A = \frac{\dot{z}_o}{\alpha}$. Logo,

$$\left\{ \begin{array}{l} (x - X_o) = \frac{\dot{z}_o}{\alpha} \cos \alpha t \\ (y - y_o) = \dot{y}_o t \\ (z - Z_o) = \frac{\dot{z}_o}{\alpha} \sin \alpha t \end{array} \right. , \quad (2.3)$$

onde, $\alpha = \frac{q B_o}{m}$.

Estas são as equações paramétricas de uma hélice circular de raio $\frac{\dot{z}_o m}{q B_o}$.

2.5 Teoremas da Conservação

O primeiro dos Teoremas da Conservação está relacionado ao MOMENTO LINEAR de uma partícula.

Se a partícula é livre, isto é, se a partícula não sofre a ação de nenhuma força, então a 2ª Lei de Newton pode ser escrita como,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \implies \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{p} = 0 .$$

Portanto, \vec{p} é um vetor constante no tempo, e o 1º Teorema da Conservação diz que:

I - *O momento Linear total de uma partícula é conservado quando a força total sobre ela é zero.*

Como este resultado é obtido de uma equação vetorial, $\vec{p} = 0$, aplica-se para cada componente do momento linear. Assim, podemos dizer que a componente do momento linear em uma direção em que a força se anula é constante no tempo, isto é, para um vetor \vec{s} constante, como $\vec{F} = 0$, então $\vec{F} \cdot \vec{s} = 0$, ou seja, $\vec{p} \cdot \vec{s} = 0$, e portanto, $\vec{p} \cdot \vec{s} = cte$.

O Momento Angular \vec{L} de uma partícula com relação a uma origem da qual o vetor posição \vec{r} é medido, e o Torque ou Momento da Força, com relação à mesma origem são definidos como,

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} ; \quad \vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} ,$$

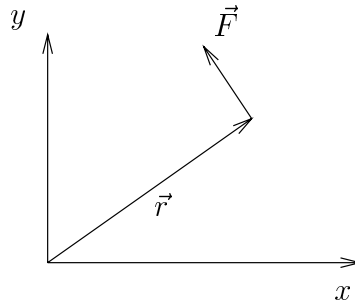


Figura 2.8: Representação dos vetores posição e força.

onde, \vec{r} é o vetor posição da origem ao ponto onde a força \vec{F} é aplicada, como mostrado na Figura (2.8)

Temos que,

$$\vec{F} = m \vec{v} \implies \vec{N} = \vec{r} \times m \vec{v} \implies \vec{N} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

Também,

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{L} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} \implies \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{p}.$$

Mas,

$$\vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \vec{r} = m \vec{r} \times \vec{r} = 0.$$

Assim,

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{N}.$$

Se nenhum torque atua sobre a partícula, isto é, $\vec{N} = 0$, então, $\vec{L} = 0$ e, portanto, \vec{L} é um vetor constante no tempo.

Portanto, o 2º Teorema da Conservação diz que:

II - *O momento Angular de uma partícula sujeita a nenhum torque é conservado.*

Se trabalho é feito sobre uma partícula por uma força \vec{F} transportando uma partícula da posição 1 para a posição 2, então este trabalho é definido por,

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

onde, \vec{F} é a força resultante.

Porém,

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt.$$

$$\text{Mas, } \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{d}{dt} (v^2) = 2 \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Assim,

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m \frac{d(v^2)}{dt} dt = d\left(\frac{1}{2} m v^2\right).$$

Logo,

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 d\left(\frac{1}{2} m v^2\right) \implies W_{12} = \left(\frac{1}{2} m v^2\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = T_2 - T_1,$$

onde, $T = \frac{1}{2} m v^2$ é a ENERGIA CINÉTICA da partícula.

Se $T_2 < T_1 \implies W_{12} < 0$, a partícula realizou trabalho, resultando em um decréscimo da energia cinética.

Se $T_2 > T_1 \implies W_{12} > 0$, foi realizado trabalho sobre a partícula, resultando em um acréscimo da energia cinética.

Em muitos problemas físicos, a força \vec{F} tem a propriedade pela qual o trabalho necessário para mover uma partícula de uma posição para outra sem qualquer variação de energia cinética depende apenas das posições inicial e final e não do caminho tomado pela partícula.

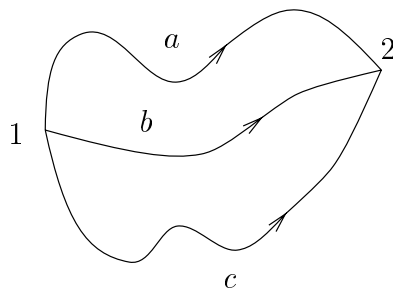


Figura 2.9: Trabalho realizado para deslocar uma partícula entre duas posições quaisquer.

Suponha que o trabalho feito para mover a partícula apresentada na Figura (2.9), do ponto 1 até o ponto 2, seja independente dos caminhos a , b ou c escolhido. Esta propriedade é exibida, por exemplo, por um campo de força gravitacional constante. Assim, se a partícula de massa m é levada até uma altura h , por qualquer caminho, então uma quantidade de trabalho mgh foi feito sobre a partícula, e a mesma pode realizar uma igual quantidade de trabalho, retornando à sua posição original. Essa capacidade de realizar trabalho é chamada ENERGIA POTENCIAL da partícula.

Podemos definir a energia potencial de uma partícula em termos do trabalho necessário para transportar a partícula de um ponto 1 até um ponto 2, sem nenhuma variação na energia cinética, como,

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = U_1 - U_2.$$

Assim, o trabalho feito para mover a partícula é simplesmente a diferença da energia potencial U para os dois pontos.

Podemos escrever \vec{F} como o gradiente da função escalar U , isto é,

$$\vec{F} = -\nabla U \implies \nabla \times \vec{F} = 0.$$

Então,

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_1^2 (\nabla U) \cdot d\vec{r} = - \int_1^2 dU = U_1 - U_2 .$$

Em muitos sistemas de interesse, a energia potencial é uma função da posição e, possivelmente do tempo: $U = U(\vec{r})$ ou $U = U(\vec{r}, t)$.

Não consideraremos casos em que a energia potencial é uma função da velocidade. Potenciais dependentes da velocidade são necessários em certas situações tais como o eletromagnetismo (os chamados POTENCIAIS DE LIÉNARD - WIECHERT).

É importante entender que a energia potencial é definida a menos de uma constante aditiva, isto é, a força definida por $-\nabla U$ não é diferente daquela definida por $-\nabla(U + cte)$. A energia potencial portanto, não tem significado absoluto; apenas diferenças de energia potencial tem significado físico.

Agora, definamos a ENERGIA TOTAL de uma partícula como sendo a soma das energias cinética e potencial,

$$E = U + T .$$

A derivada temporal total de E é,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} .$$

Temos que,

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = d\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = dT \implies \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dT}{dt} \implies \frac{dT}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{r} ,$$

e,

$$\frac{dU}{dt} = \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial U}{\partial t} = (\nabla U \cdot \vec{r}) + \frac{\partial U}{\partial t} .$$

Logo,

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{r} + (\nabla U \cdot \vec{r}) + \frac{\partial U}{\partial t} = (\vec{F} + \nabla U) \cdot \vec{r} + \frac{\partial U}{\partial t} ,$$

como, $\vec{F} = -\nabla U$, então,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} .$$

Assim, se U não é uma função explícita do tempo, isto é, $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$, a força representada por \vec{F} é dita CONSERVATIVA.

Sob essas condições, temos o 3º Teorema da Conservação, que diz:

III - A energia total E de uma partícula em um campo de força conservativo é uma constante no tempo.

2.6 Energia

Considere uma partícula sob a influência de uma força conservativa com potencial U . Então, no caso unidimensional,

$$E = T + U = \frac{1}{2} m v^2 + U(x) \implies E - U(x) = \frac{1}{2} m v^2 \implies v = \pm \sqrt{\frac{2(E - U)}{m}},$$

e assim,

$$t - t_o = \int_{x_o}^x \frac{\pm dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U)}}.$$

Consideremos a Figura (2.10) que representa o gráfico de um potencial $U(x)$ em função de x . Para as energias E_1 e E_2 o movimento é ligado. Para E_1 o movimento é periódico entre os

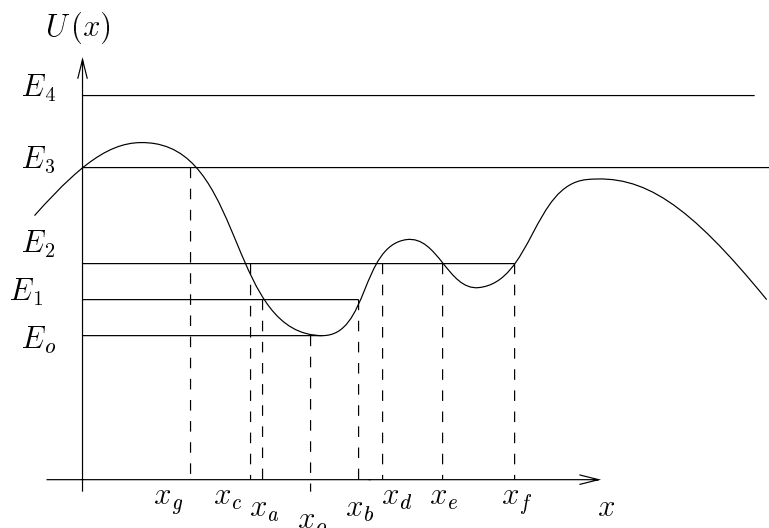


Figura 2.10: Gráfico de um potencial $U(x)$ em função de x .

pontos de retorno x_a e x_b . Similarmente, para E_2 o movimento é periódico, mas existem duas possíveis regiões: $x_c \leq x \leq x_d$ e $x_e \leq x \leq x_f$. A partícula não pode “pular” de um poço para outro; uma vez em um poço, deve permanecer para sempre se sua energia permanecer E_c . O movimento para uma partícula com energia E_o tem um único valor, $x = x_o$. A partícula está em repouso, com $T = 0$.

O movimento para uma partícula com energia E_3 é simples: a partícula vem do infinito, pára e retorna em $x = x_g$ para o infinito.

Para a energia E_4 , o movimento é NÃO LIGADO e a partícula pode estar em qualquer posição. Sua velocidade varia porque ela depende da diferença entre E_4 e $U(x)$. Se ela estiver se movendo para a direita, ela aumenta e diminui mas continua até o infinito.

O movimento de uma partícula de energia E_1 é semelhante àquele de uma massa presa a uma mola. O potencial na posição $x_a \leq x \leq x_b$ pode ser aproximado por,

$$U(x) = \frac{1}{2} k(x - x_o)^2$$

Uma partícula com energia apenas acima de E_o , oscilará em torno do ponto $x = x_o$. Tal ponto é dito um PONTO DE EQUILÍBRIO, porque, se a partícula é colocada em $x = x_o$ ela permanecerá lá.

O equilíbrio pode ser ESTÁVEL, INSTÁVEL ou INDIFERENTE (ou NEUTRO).

Sabemos que para uma força conservativa pode-se definir uma função energia potencial, $U(x, y, z)$, estando U relacionada com \vec{F} pelas equações,

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}; F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}; F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Nos pontos em que $\frac{\partial U}{\partial x}$ se anula, uma partícula submetida a esta força conservativa estará em equilíbrio translacional na direção Ox , pois então F_x é nula. Analogamente, para $\frac{\partial U}{\partial y}$ e $\frac{\partial U}{\partial z}$ nulos, uma partícula estará em equilíbrio translacional segundo Oy e Oz , respectivamente. A derivada de U será nula em um ponto em que esta função tenha um valor extremo (máximo ou mínimo) ou quando U seja constante em relação à respectiva variável.

Quando U for mínima (primeira derivada nula e segunda derivada positiva), a partícula encontra-se em equilíbrio ESTÁVEL; qualquer deslocamento em relação a essa posição resultará em uma força restauradora que tende a fazer voltar a partícula para a posição de equilíbrio. Outro modo de enunciar, isto é, dizer que se um corpo está em equilíbrio estável, deve ser realizado algum trabalho sobre ele por um agente externo, a fim de alterar sua posição, o que resultará em um aumento de sua energia potencial.

Quando U for máxima (primeira derivada nula e segunda derivada negativa), a partícula encontra-se em equilíbrio INSTÁVEL; qualquer deslocamento em relação a essa posição implicará em uma força restauradora que tende a afastar a partícula ainda mais da posição de equilíbrio. Nesse caso não é necessário que nenhum agente externo realize trabalho sobre a partícula, para alterar sua posição; o trabalho realizado para deslocar o corpo é fornecido internamente pela força conservativa, resultando em um decréscimo de energia potencial.

Quando U for constante (todas as derivadas nulas), a partícula estará em equilíbrio INDIFERENTE. Nesse caso, a partícula poderá ter um pequeno deslocamento, sem ficar sujeita quer a uma força restauradora, quer a uma força de repulsão.

Observe que uma partícula pode estar em equilíbrio em relação a uma das coordenadas, sem estar necessariamente em equilíbrio relativamente às demais, como é o caso de um corpo que cai. Além disso, uma partícula pode estar em equilíbrio estável em relação a uma das coordenadas e em equilíbrio instável relativamente a outra, como, por exemplo, uma partícula em um ponto sela.

Todas essas observações aplicam-se a partículas, isto é, ao movimento de translação. Suponhamos agora que se trate de um corpo rígido. Nesse caso devemos considerar não apenas o equilíbrio de translação mas também o de rotação. O problema de um corpo rígido em um campo gravitacional é particularmente simples, porque todas as forças gravitacionais que atuam nas partículas de um corpo rígido podem considerar-se aplicadas em um só ponto, quer em relação à translação como em relação à rotação. Podemos substituir todo o corpo rígido, para avaliar o equilíbrio sob a ação de forças gravitacionais, por uma única partícula de massa equivalente, concentrada no centro de gravidade.

2.7 Problemas Resolvidos

01) Uma partícula de massa m em repouso em $t = 0$ está submetida à força $F(t) = F_o \sin^2 \omega t$. Determine $v = v(t)$ e $x = x(t)$.

Resolução:

$$m \frac{dv}{dt} = F_o \sin^2 \omega t \implies dv = \frac{F_o}{m} \sin^2 \omega t dt \implies \int_0^v dv = \frac{F_o}{2m} \int_0^t (1 - \cos 2\omega t) dt ,$$

assim,

$$v = \frac{F_o}{4m\omega} (2\omega t - \sin 2\omega t) .$$

Também,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F_o}{4m\omega} (2\omega t - \sin 2\omega t) \implies x = \frac{F_o}{8m\omega^2} (2\omega^2 t^2 - 1 + \cos 2\omega t) .$$

02) A aceleração de um ponto material é dada por: $a = 25 - 3s^2$. O ponto parte do repouso. Calcular:

- a) a velocidade para $s = 2$;
- b) a posição quando a velocidade se anular outra vez;
- c) a posição para a velocidade máxima. Considere $s_o = 0$.

Resolução:

a)

$$a = v \frac{dv}{ds} = 25 - 3s^2 \implies \frac{v^2}{2} = 25s - s^3 + C ,$$

mas, em $t = 0$, $v_o = s_o = 0$. Então, $C = 0$.

Assim,

$$v^2 = 50s - 2s^3 .$$

Portanto, para $s = 2$, $v = \sqrt{84}$.

b)

$$v = 0 \implies 50s - 2s^3 = 0 \implies s = 0 \text{ ou } s = 5m .$$

Como $s = 0$ é a condição inicial, a resposta é $s = 5m$.

c)

$$v = \sqrt{50s - 2s^3} \implies \frac{dv}{ds} = 0 \implies \frac{50 - 6s^2}{2\sqrt{50s - 2s^3}} = 0 \implies 50 - 6s^2 = 0 \implies s = \frac{5\sqrt{3}}{3} .$$

03) Um barco cuja velocidade inicial é v_0 é desacelerado por uma força de atrito dada por $F = -b e^{\alpha v}$, onde b e α são constantes positivas. Determine o tempo necessário para parar o barco.

Resolução:

$$F = m \ddot{x} = -b e^{\alpha v} \implies m \frac{dv}{dt} = -b e^{\alpha v} \implies \int_{v_0}^v e^{-\alpha v} dv = -\frac{b}{m} \int_0^t dt \implies e^{-\alpha v} = e^{-\alpha v_0} + \frac{\alpha b}{m} t.$$

$$\text{Para } v = 0, \quad T = \frac{m(1 - e^{-\alpha v_0})}{\alpha b}.$$

04) Considere o sistema de polias, massas e cordas mostrado na Figura (2.11). Uma corda leve de comprimento b está presa no ponto A , passa por uma polia B localizada a uma distância $2d$, e finalmente é presa à massa m_1 . Outra polia com uma massa m_2 pendurada passa sobre a corda, puxando-a para baixo entre A e B . Calcule a distância x_0 quando o sistema está em equilíbrio, e determine se o equilíbrio é estável ou instável. As polias são ideais.

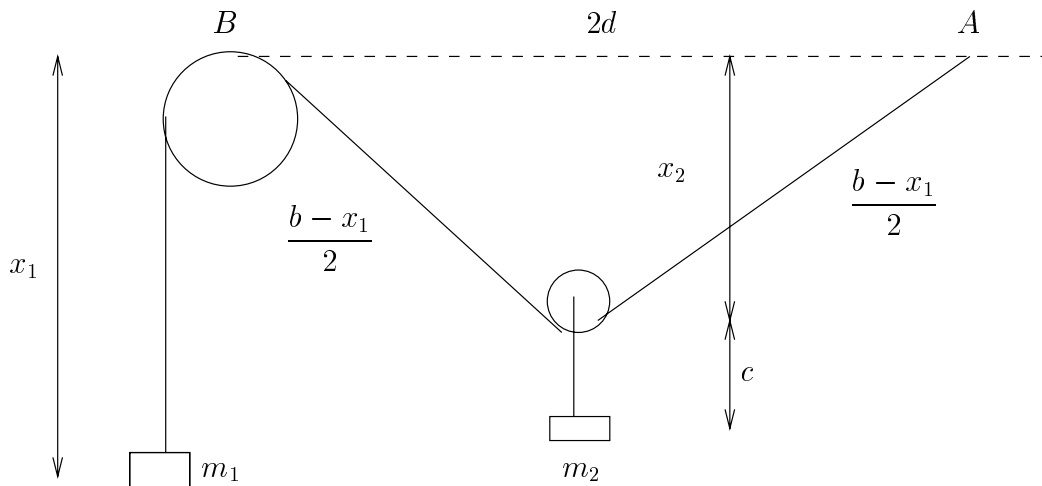


Figura 2.11: Exemplo1.

Resolução:

No equilíbrio, a energia cinética $T = 0$ e portanto, só temos energia potencial U .

Se considerarmos a linha \overline{AB} como nível de energia potencial, isto é, $U_{AB} = 0$, então, no equilíbrio,

$$U = -m_1 g x_1 - m_2 g (x_2 + c),$$

mas,

$$x_2^2 = \frac{(b-x_1)^2}{4} - d^2 \implies x_2 = \sqrt{\frac{(b-x_1)^2}{4} - d^2}.$$

Logo,

$$U = -m_1 g x_1 - m_2 g \sqrt{\frac{(b-x_1)^2}{4} - d^2} - m_2 g c.$$

Então,

$$\frac{dU}{dx_1} = -m_1 g + m_2 g \frac{1}{4} (b - x_1) \frac{1}{\sqrt{\frac{(b - x_1)^2}{4} - d^2}}.$$

Para a condição de equilíbrio,

$$\left. \frac{dU}{dx_1} \right|_{x_1=x_o} = 0 \implies -m_1 g \sqrt{\frac{(b - x_o)^2}{4} - d^2} + \frac{m_2 g}{4} (b - x_o) = 0,$$

e assim,

$$x_o = b - \frac{4 m_1 d}{\sqrt{4 m_1^2 - m_2^2}},$$

onde, devemos ter, $4m_1^2 > m_2^2$.

Para verificarmos o tipo de equilíbrio (estável ou instável), devemos fazer a segunda derivada da função U e calculá-la no ponto $x_1 = x_o$, ou seja,

$$\left. \frac{d^2U}{dx_1^2} \right|_{x_1=x_o} = \frac{15 m_2 g}{8 m_1 d} \sqrt{4m_1^2 - m_2^2}.$$

Como a condição para equilíbrio real é $4m_1^2 > m_2^2$, então,

$$\left. \frac{d^2U}{dx_1^2} \right|_{x_1=x_o} > 0,$$

o que implica que x_o é ponto de equilíbrio ESTÁVEL.

05) Considere o potencial unidimensional

$$U(x) = -\frac{W d^2 (x^2 + d^2)}{x^4 + 8 d^4}.$$

Esboce o potencial e discuta o movimento para vários valores de x . É o movimento ligado ou não? Onde estão os valores de equilíbrio? São eles estáveis ou instáveis? Encontre os pontos de retorno para $E = -\frac{W}{8}$. O valor de W é uma constante positiva.

Resolução:

$$\frac{U(x)}{W} = -\frac{x^2/d^2 + 1}{x^4/d^4 + 8}.$$

Sejam, $\frac{x}{d} = y$ e $\frac{U}{W} = Z(y)$. Então,

$$Z(y) = -\frac{y^2 + 1}{y^4 + 8} = -(y^2 + 1) (y^4 + 8)^{-1}.$$

Cálculo dos pontos de equilíbrio:

$$\frac{dZ}{dy} = -2y (y^4 + 8)^{-1} - (y^2 + 1) (-1) (y^4 + 8)^{-2} \cdot 4y^3 \implies \frac{dZ}{dy} = \frac{2y (y^4 + 2y^2 - 8)}{(y^4 + 8)^2}.$$

Assim,

$$\frac{dZ}{dy} = 0 \implies 2y(y^4 + 2y^2 - 8) = 0 \implies y_1 = 0; y_2 = \sqrt{2}; y_3 = -\sqrt{2}.$$

Como $\frac{x}{d} = y$, obtemos: $x_1 = 0$, $x_2 = d\sqrt{2}$ e $x_3 = -d\sqrt{2}$.

E, como $Z(y) = -\frac{y^2 + 1}{y^4 + 8}$, então, $Z(0) = -1/8$; $Z(\sqrt{2}) = Z(-\sqrt{2}) = -1/4$.

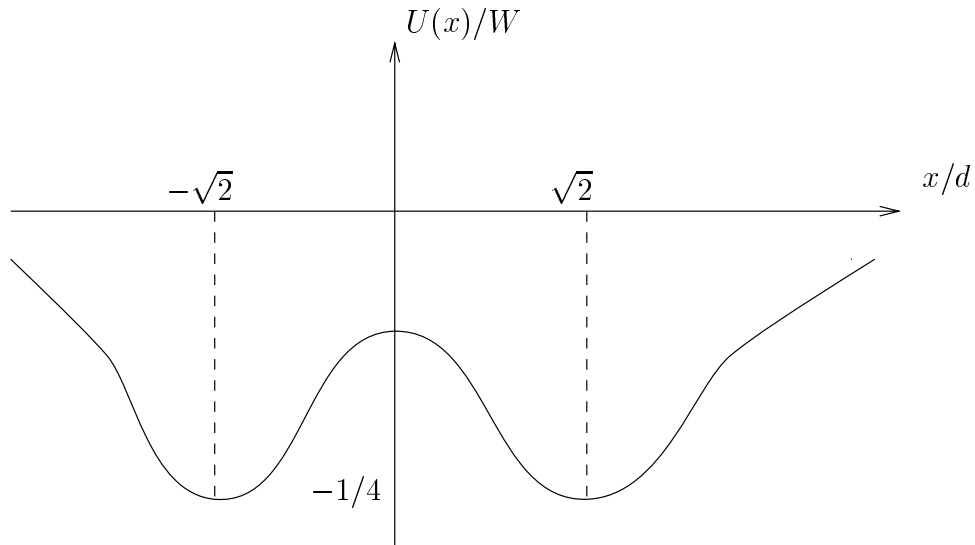


Figura 2.12: Gráfico do potencial $U(x)$ em função de x .

O esboço do potencial $U(x)$ está mostrado na Figura (2.12).

Consideremos agora o tipo de equilíbrio. Para isso, precisamos calcular a segunda derivada de $Z(y)$.

Temos que,

$$\frac{d^2 Z}{dy^2} = \frac{10y^4 + 12y^2 - 16}{(y^4 + 8)^2} - \frac{8y^3(2y^5 + 4y^3 - 16y)}{(y^4 + 8)^3}.$$

Para $y = 0 \implies \frac{d^2 Z}{dy^2} \Big|_{y=0} = -1/4 < 0$. Portanto, $y = 0$ é ponto de máximo e assim, é um ponto de equilíbrio INSTÁVEL.

Para $y = \sqrt{2} \implies \frac{d^2 Z}{dy^2} \Big|_{y=\sqrt{2}} = 7/256 > 0$. Portanto, $y = \sqrt{2}$ é ponto de mínimo e assim, é um ponto de equilíbrio ESTÁVEL.

Para $y = -\sqrt{2} \implies \frac{d^2 Z}{dy^2} \Big|_{y=-\sqrt{2}} = 7/256 > 0$. Portanto, $y = -\sqrt{2}$ é ponto de mínimo e assim, é um ponto de equilíbrio ESTÁVEL.

Assim, o equilíbrio é ESTÁVEL em x_2 e x_3 e INSTÁVEL em x_1 .

O movimento é ligado para todas as energias $E < 0$.

Para calcular os pontos de retorno, consideremos $T = 0$. Logo,

$$E = 0 + U(x) \implies E = -\frac{W}{8} = U(y) = -\frac{W(y^2 + 1)}{y^4 + 8} \implies y^2(y^2 - 8) = 0 \implies y = 0; y = \pm 2\sqrt{2}.$$

Assim, para $E = -\frac{W}{8}$, os pontos de retorno são $x = \pm 2\sqrt{2}$ e $x = 0$.

06) Uma partícula de massa m move-se de acordo com as equações: $x = x_o + a t^2$; $y = b t^3$; $z = c t$. Determine o momento angular \vec{L} em qualquer instante t , a força \vec{F} e o torque \vec{N} sobre a partícula.

Resolução:

$$\vec{r} = (x_o + a t^2)\hat{i} + b t^3 \hat{j} + c t \hat{k} \implies \vec{v} = 2 a t \hat{i} + 3 b t^2 \hat{j} + c \hat{k} \implies \vec{a} = 2 a \hat{i} + 6 b t \hat{j},$$

então,

$$\vec{F} = m \vec{a} \implies \vec{F} = 2 m a \hat{i} + 6 m b t \hat{j},$$

e,

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \implies \vec{L} = -2 m b c t^3 \hat{i} + (m a c t^2 - m c x_o) \hat{j} + (3 m b x_o t^2 - 9 m a b t^4) \hat{k},$$

e portanto,

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} \implies \vec{N} = -6 m b c t^2 \hat{i} + 2 m a c t \hat{j} + (6 m b x_o t - 36 m a b t^3) \hat{k}.$$

07) Uma partícula é submetida à ação de uma força cujos componentes são: $F_x = a x^3 + b x y^2 + c z$; $F_y = a y^3 + b x^2 y$ e $F_z = c x$. Calcule o trabalho realizado por esta força, quando a partícula se move ao longo de uma linha reta a partir da origem até o ponto $P = (x_o, y_o, z_o)$.

Resolução:

Como,

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = 2 b x y,$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} = c,$$

e,

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} = 0,$$

então, \vec{F} é CONSERVATIVA. Sendo assim, podemos dizer que existe uma energia potencial, ϕ , associada ao campo de força conservativo, F , de tal forma que,

$$F_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}; F_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}; F_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

Assim,

$$\phi(x, y, z) = - \int F_x dx + \phi_1(y, z) = -\frac{ax^4}{4} - \frac{bx^2y^2}{2} - cxz + \phi_1(y, z).$$

Derivando a última expressão, em relação à y e igualando-a à F_y , obtemos,

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -bx^2y + \frac{\partial \phi_1(y, z)}{\partial y} \implies \frac{\partial \phi_1(y, z)}{\partial y} = -ay^3 \implies \phi_1(y, z) = -\frac{ay^4}{4} + \psi_1(z).$$

Assim,

$$\phi(x, y, z) = -\frac{ax^4}{4} - \frac{bx^2y^2}{2} - cxz - \frac{ay^4}{4} + \psi_1(z).$$

Derivando agora em relação à z e igualando-a à F_z , obtemos finalmente,

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -cx + \frac{\partial \psi_1(z)}{\partial z} \implies \frac{\partial \psi_1(z)}{\partial z} = 0 \implies \psi_1(z) = \phi_o,$$

onde, ϕ_o é uma constante.

Portanto, podemos finalmente escrever a expressão para a energia potencial, $\phi(x, y, z)$, como,

$$\phi(x, y, z) = -\frac{ax^4}{4} - \frac{ay^4}{4} - \frac{bx^2y^2}{2} - cxz + \phi_o.$$

Para calcularmos o trabalho realizado, temos que,

$$W = \phi(0, 0, 0) - \phi(x_o, y_o, z_o) = \phi_o - \left(-\frac{ax_o^4}{4} - \frac{ay_o^4}{4} - \frac{bx_o^2y_o^2}{2} - cx_oz_o + \phi_o\right),$$

e assim,

$$W = \frac{ax_o^4}{4} + \frac{ay_o^4}{4} + \frac{bx_o^2y_o^2}{2} + cx_oz_o.$$

2.8 Problemas Propostos

01) Se um projétil é lançado da origem de um sistema de coordenadas com uma velocidade inicial v_o e numa direção que faz um ângulo α com a horizontal, calcule o tempo necessário para que o projétil cruze uma linha passando pela origem e formando um ângulo $\beta < \alpha$ com a horizontal.

02) Um projétil é lançado com uma velocidade v_o tal que ele passa através de dois pontos, ambos a uma distância h acima da horizontal. Mostre que a arma é ajustada para o alcance máximo quando a separação dos pontos é $d = \frac{v_o}{g} \sqrt{v_o^2 - 4gh}$.

03) Considere um projétil atirado verticalmente em um campo gravitacional constante. Para a mesma velocidade inicial o tempo requerido para o projétil atingir sua altura máxima:

a) para força resistiva zero;

b) para uma força resistiva proporcional à velocidade instantânea do projétil ($F_R = -m k v$).

04) Uma partícula é projetada verticalmente para cima em um campo gravitacional constante com uma velocidade inicial v_o . Mostre que se existir uma força resistiva proporcional ao quadrado da velocidade instantânea, a velocidade da partícula quando ela retornar à posição inicial é $v = \frac{v_o v_t}{\sqrt{v_o^2 + v_t^2}}$, onde v_t é a velocidade terminal.

05) Uma partícula move-se em um meio sob a influência de uma força resistiva igual a $m k (v^3 + a^2 v)$, onde k e a são constantes. Mostre que para qualquer valor da velocidade inicial, a partícula nunca se moverá uma distância maior que $\frac{\pi}{2 k a}$ e que a partícula chega ao repouso só para $t \rightarrow \infty$.

06) Um projétil é atirado com uma velocidade inicial v_o com um ângulo de elevação α de uma rampa de inclinação β ($\alpha > \beta$).

a) A que distância da posição de lançamento o projétil atingirá a rampa novamente?

b) Para que ângulo α o alcance será um máximo?

c) Qual é o alcance máximo?

07) Uma partícula de massa m desliza para baixo num plano inclinado sob a influência da gravidade. Se uma força resistiva $f = k m v^2$ se opõe ao movimento, mostre que o tempo requerido para a partícula se mover uma distância d após partir do repouso é $\frac{\cosh^{-1}(e^{k d})}{\sqrt{k g \sin \theta}}$, onde θ é o ângulo de inclinação do plano inclinado.

08) Se um projétil move-se de tal maneira que a distância do ponto de lançamento é sempre crescente, encontre o ângulo máximo acima da horizontal com o qual a partícula pode ter sido projetada. Despreze a resistência do ar.

09) Mostre diretamente que a taxa de variação temporal do momento angular em torno da origem para um projétil lançado da origem (g constante) é igual ao momento da força (ou torque) em torno da origem.

10) O movimento de uma partícula carregada em um campo eletromagnético pode ser obtido da Equação de Lorentz para a força sobre uma partícula em um tal campo. Se o vetor campo elétrico é \vec{E} e o vetor campo magnético é \vec{B} , a força sobre uma partícula de massa m que carrega uma carga q e tem uma velocidade \vec{v} é dada por $\vec{F} = q \vec{E} + q \vec{v} \times \vec{B}$, onde supomos que $v \ll c$ (velocidade da luz).

a) Se não existe campo elétrico e se a partícula entra no campo magnético numa direção perpendicular às linhas do fluxo magnético, mostre que a trajetória é um círculo com raio $r = \frac{m v}{q B} = \frac{v}{\omega_c}$, onde $\omega_c = \frac{q B}{m}$ é a frequência ciclotron.

b) Escolha o eixo z na direção de \vec{B} e considere o plano yz como sendo o plano contendo \vec{E}

e \vec{B} , ou seja, $\vec{B} = B \hat{k}$; $\vec{E} = E_y \hat{j} + E_z \hat{k}$. Mostre que a componente z do movimento é dada por

$$z(t) = z_o + \dot{z}_o t + \frac{q E_z}{2m} t^2 ,$$

onde, $z(0) = z_o$ e $\dot{z}(0) = \dot{z}_o$.

c) Continue os cálculos e obtenha as expressões para $\dot{x}(t)$ e $\dot{y}(t)$. Mostre que a média temporal dessas componentes de velocidades são

$$\langle \dot{x} \rangle = \frac{E_y}{B} ; \langle \dot{y} \rangle = 0 .$$

Mostre que o movimento é periódico e então avalie a média temporal de x e y em um período completo.

d) Integre as equações da velocidade encontradas no item (c) e mostre (com as condições iniciais $x(0) = -\frac{A}{\omega_c}$, $\dot{x}(0) = \frac{E_y}{B}$, $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = A$), que

$$x(t) = -\frac{A}{\omega_c} \cos \omega_c t + \frac{E_y}{B} t ,$$

e,

$$y(t) = \frac{A}{\omega_c} \sin \omega_c t .$$

11) Uma partícula de massa $m = 1kg$ é submetida a uma força unidimensional $F(t) = k t e^{-\alpha t}$, onde $k = 1N/s$ e $\alpha = 0,5/s$. Se a partícula inicialmente está em repouso, calcule a posição, a velocidade e a aceleração da partícula como uma função do tempo.

12) Um bloco de massa m desliza para baixo sobre uma superfície sem atrito como mostra a Figura (2.13). O bloco está em repouso a uma altura h acima da base do loop.

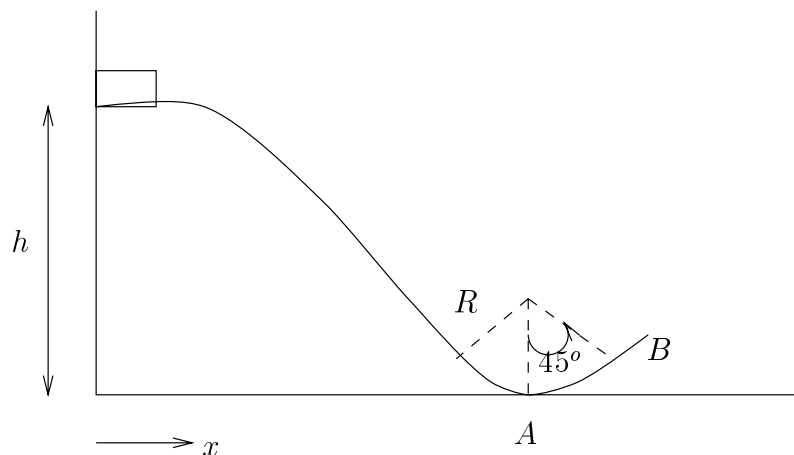


Figura 2.13: Superfície sem atrito do Problema 12.

- a) Qual é a força da superfície sobre o bloco na base (ponto A)? E no ponto B?
- b) Com que velocidade o bloco abandona a superfície?
- c) A que distância do ponto A o bloco atinge o nível horizontal?
- d) Esquematize a energia potencial, $U(x)$ do bloco, indicando a energia total no esquema.

13) Dois blocos de massas $2m$ e m estão conectados por uma corda que passa por uma polia conforme mostra a Figura (2.14). Se o coeficiente de atrito cinético é μ_k , que ângulo θ permite às massas moverem-se com uma velocidade constante?

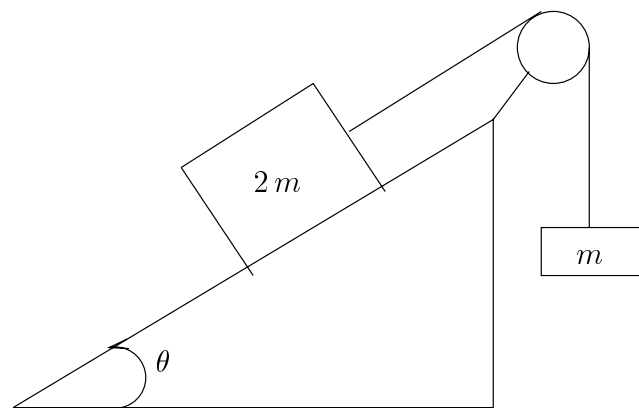


Figura 2.14: Massas do Problema 13.

14) Uma partícula de massa m tem velocidade $v = \frac{\alpha}{x}$, onde x é seu deslocamento e α é uma constante positiva. Encontre a força F responsável pelo seu movimento.

15) A velocidade de uma partícula de massa m varia com a distância x como $v(x) = \alpha x^{-n}$. Considere $v(0) = 0$ em $t = 0$.

- a) Encontre a força F responsável pelo movimento;
- b) Determine $x(t)$;
- c) Calcule $F(t)$.

16) Um barco com velocidade inicial v_0 é colocado sobre um lago. O barco é freado pela água por uma força $F = -\alpha e^{\beta v}$.

- a) Encontre uma expressão para a velocidade $v(t)$;
- b) Determine o tempo e a distância necessários para que o barco pare.

17) Uma partícula move-se em uma órbita bidimensional definida por:

$$x(t) = A(2\alpha t - \sin \alpha t); y(t) = A(1 - \cos \alpha t).$$

a) Determine a aceleração tangencial e a aceleração normal como uma função do tempo;

b) Determine em que instante na órbita, a aceleração normal tem um máximo.

18) Uma partícula está submetida à influência de uma força $F = -kx + k\frac{x^3}{\alpha^2}$, onde k e α são constantes e k é positiva. Determine $U(x)$ e discuta o movimento. O que acontece quando $E = \frac{1}{4}k\alpha^2$?

19) Considere uma partícula movendo-se na região $x > 0$ sob a influência do potencial $U(x) = U_o \left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a} \right)$, onde $U_o = 1J$ e $a = 2m$. Plote o potencial, encontre os pontos de equilíbrio, classificando-os em estável ou instável.

20) Uma gota d'água esférica cai na atmosfera. Suponha que quando a gota passa através de uma nuvem, ela adquire massa à uma taxa proporcional à kA , onde k é uma constante positiva e A é a área de seção transversal. Considere uma gota de raio inicial r_o que entra em uma nuvem com uma velocidade v_o . Assuma nenhuma força resistiva e mostre:

a) que o raio da gota aumenta linearmente com o tempo;

b) que se r_o é desprezivelmente pequeno então a velocidade aumenta linearmente com o tempo dentro da nuvem.

21) Uma partícula α (núcleo do átomo de hélio) está ligada a um núcleo pesado por um potencial semelhante ao da Figura (2.15).

a) Construa uma função de x , que tenha esse aspecto geral, com valor mínimo U_o em $x = 0$ e máximo U_1 em $x = x_1$ e $x = -x_1$;

b) Determine a força entre a partícula α e o núcleo, como função de x ;

c) Descreva os movimentos possíveis.

2.9 Exercícios Extras Sobre Operadores Matemáticos

01) Se $\phi(x, y, z) = x^2 y z$ e $\vec{A} = 3x^2 y \hat{i} + y z^2 \hat{j} - x z \hat{k}$, encontre $\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\phi \vec{A})$ no ponto $(1, -2, -1)$.

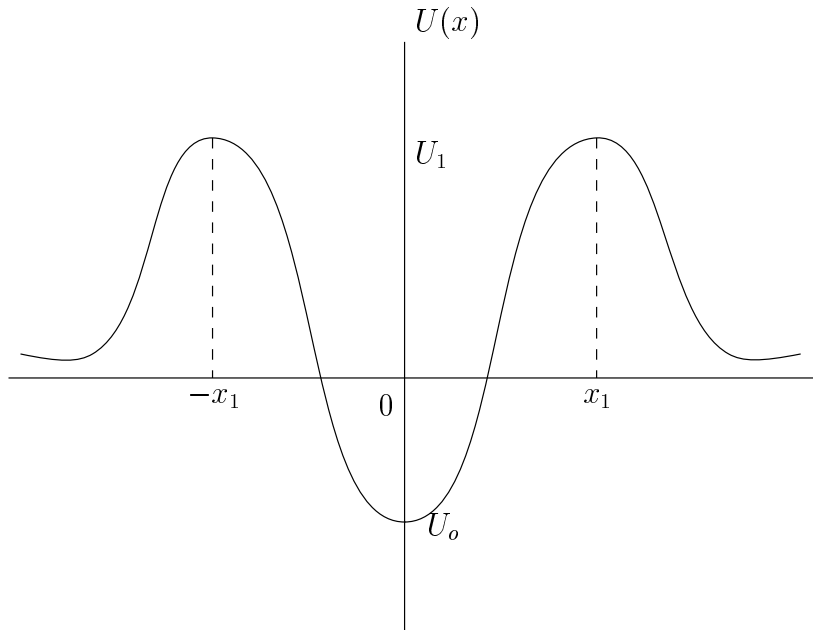


Figura 2.15: Função Potencial do Problema 21.

02) Se $\phi(x, y, z) = x^2 y z^3$ e $\vec{A} = x z \hat{i} - y^2 \hat{j} + x^2 y \hat{k}$, encontre:

a) $\nabla \phi$; b) $\nabla \cdot \vec{A}$; c) $\nabla \times \vec{A}$; d) $\text{div}(\phi \vec{A})$; e) $\text{rot}(\phi \vec{A})$.

03) (a) Se $\vec{A} = (2xy + z^3) \hat{i} + (x^2 + 2y) \hat{j} + (3xz^2 - 2) \hat{k}$, mostre que $\nabla \times \vec{A} = 0$;

(b) Encontre uma função escalar ϕ tal que $\vec{A} = \nabla \phi$.

04) Se $\vec{A} = (3x^2 - 6yz) \hat{i} + (2y + 3xz) \hat{j} + (1 - 4xyz^2) \hat{k}$, avalie $\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$ de $(0, 0, 0)$ à $(1, 1, 1)$ ao longo dos seguintes caminhos:

a) $x = t$; $y = t^2$; $z = t^3$;

b) de $(0, 0, 0)$ à $(0, 0, 1)$, então para $(0, 1, 1)$ e então para $(1, 1, 1)$;

c) pela linha reta ligando $(0, 0, 0)$ à $(1, 1, 1)$.

05) Se $\vec{A} = (2xy + z^3) \hat{i} + (x^2 + 2y) \hat{j} + (3xz^2 - 2) \hat{k}$, mostre que:

a) $\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$ é independente do caminho C que liga os pontos $(1, -1, 1)$ e $(2, 1, 2)$;

b) Encontre seu valor.

06) Se $\vec{A} = xz \hat{i} + (2x^2 - y) \hat{j} - yz^2 \hat{k}$ e $\phi = 3x^2 y + y^2 z^3$, encontre, no ponto $(1, -1, 1)$:

a) $\nabla \phi$; b) $\nabla \cdot \vec{A}$; c) $\nabla \times \vec{A}$.

07) Se $\phi = xy + yz + zx$ e $\vec{A} = x^2 y \hat{i} + y^2 z \hat{j} + yz^2 x \hat{k}$, encontre, no ponto $(3, -1, 2)$:

a) $\vec{A} \cdot \nabla \phi$; b) $\phi \nabla \cdot \vec{A}$; c) $\nabla \phi \times \vec{A}$.

08) Encontre as equações para o plano tangente e a linha normal à superfície $x^2 yz + 3y^2 = 2xz^2 - 8z$ no ponto $P = (1, 2, -1)$.

09) Mostre que a superfície $x^2 - 2yz + y^3 = 4$ é perpendicular à qualquer membro da família das superfícies $x^2 + 1 = (2 - 4a)y^2 + az^2$ no ponto de intersecção $Q = (1, -1, 2)$.

10) Encontre as equações para a linha tangente e o plano normal à curva: $x = t - \cos t$; $y = 3 + \sin 2t$; $z = 1 + \cos 3t$, no ponto onde $t = \frac{\pi}{2}$.

11) Encontre as equações para a linha tangente e o plano normal à curva $3x^2y + y^2z = -2$, $2xz - x^2y = 3$ no ponto $(1, -1, 1)$.

12) Encontre a derivada direcional de $F = x^2 yz^3$ ao longo da curva: $x = e^{-u}$, $y = 2 \sin u + 1$, $z = u - \cos u$ no ponto P onde $u = 0$.

13) Seja $U = 2x^3y - 3y^2$ e os pontos $P = (1, 2, -1)$ e $Q = (3, -1, 5)$.

a) Encontre a derivada direcional de U no ponto P na direção de Q ;

b) Em que direção a partir de P a derivada direcional é máxima?

c) Qual é o módulo da derivada direcional máxima?

3

Alguns Métodos no Cálculo Variacional

3.1 Introdução

Muitos problemas na Mecânica Newtoniana são mais facilmente analisados por meio de métodos alternativos como os Princípios de Hamilton e as Equações de Lagrange.

O desenvolvimento do cálculo variacional foi iniciado por Newton (1680) e foi desenvolvido por Johan e Jakob Bernoulli (1696) e por Euler (1744). Adrien Legendre (1786), Joseph Lagrange (1788), Hamilton (1833) e Jacob (1837) deram importantes contribuições. Os nomes de Peter Dirichlet (1805-1859) e Karl Weierstrass (1815 - 1879) estão particularmente associados ao estabelecimento dos fundamentos matemáticos do cálculo variacional.

3.2 Definição do problema

O problema básico do cálculo variacional é determinar a função $y(x)$ tal que a integral,

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x), y'(x); x] dx ,$$

é um extremo, isto é, um máximo ou um mínimo.

Varia-se a função $y(x)$ até que um valor extremo de J seja encontrado. Assim, se a função $y = y(x)$ fornece à integral J um valor mínimo (máximo), então qualquer FUNÇÃO VIZINHA de $y(x)$ deve fazer J crescer (decrecer).

Para definir a Função Vizinha, daremos a todas as possíveis funções $y(x)$, uma representação paramétrica, $y = y(\alpha, x)$ tal que, para $\alpha = 0$, $y = y(0, x) = y(x)$ é a função que fornece um extremo para J .

Podemos escrever então,

$$y(\alpha, x) = y(0, x) + \alpha \eta(x), \quad (3.1)$$

onde, $\eta(x)$ é qualquer função de x que tenha primeira derivada contínua e que se anule nos pontos extremos do caminho, isto é, $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$.

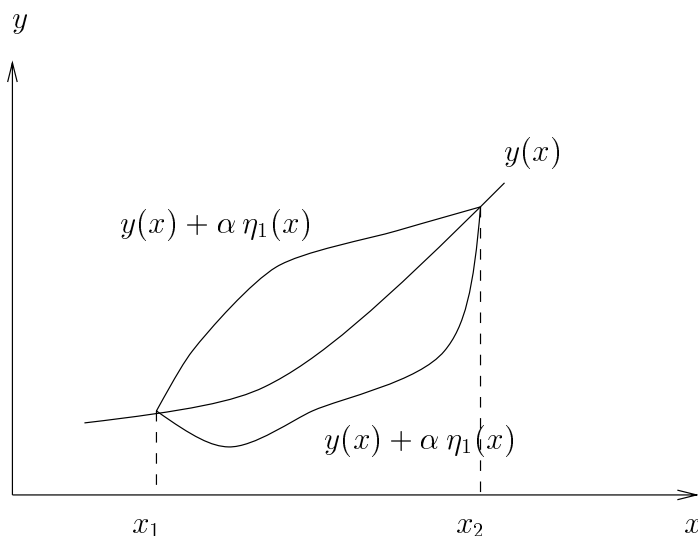


Figura 3.1: Representação da função $\eta(x)$.

Considerando funções do tipo da Equação (3.1), podemos escrever a integral J em função do parâmetro α , como,

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f[y(\alpha, x), y'(\alpha, x); x] dx, \quad (3.2)$$

A condição para que a integral tenha um VALOR ESTACIONÁRIO, isto é, um resultado extremos, é que J seja independente de α em primeira ordem ao longo do caminho dado pelo extremo ($\alpha = 0$), ou seja,

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0, \quad (3.3)$$

qualquer que seja $\eta(x)$.

Exemplo 1: Considere a função $f = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, onde $y(x) = x$. Adicione à $y(x)$ a função $\eta(x) = \sin x$, e encontre $J(\alpha)$ entre os limites de $x = 0$ e $x = 2\pi$. Mostre que o valor estacionário de $J(\alpha)$ ocorre para $\alpha = 0$.

Resolução:

$$y(\alpha, x) = x + \alpha \sin(x) \implies \frac{dy}{dx} = 1 + \alpha \cos x.$$

Assim,

$$f = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (1 + \alpha \cos x)^2 = 1 + 2\alpha \cos x + \alpha^2 \cos^2 x.$$

Temos então que,

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f dx = \int_0^{2\pi} (1 + 2\alpha \cos x + \alpha^2 \cos^2 x) dx \implies J(\alpha) = 2\pi + \pi\alpha^2,$$

e,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = 2\pi\alpha.$$

Assim,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = 0 \iff \pi\alpha = 0 \implies \alpha = 0$$

3.3 Equação de Euler

Para determinar a condição expressa na Equação (3.3), devemos diferenciar a Equação (3.2), isto é,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{x_1}^{x_2} f[y, y'; x] dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} f[y, y'; x] dx.$$

Logo,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) dx.$$

Como, $\frac{\partial x}{\partial \alpha} = 0$, então,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right) dx.$$

Mas,

$$y(\alpha, x) = y(0, x) + \alpha \eta(x) \implies \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta(x),$$

e,

$$y'(\alpha, x) = y'(0, x) + \alpha \eta'(x) \implies \frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \eta'(x).$$

Logo,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta'(x) \right] dx.$$

Seja

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \eta'(x) dx.$$

Integrando por partes, temos,

$$u = \frac{\partial f}{\partial y'} \implies du = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx,$$

e,

$$dv = \eta'(x) dx \implies v = \eta(x).$$

Assim,

$$I = u v \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} v du = \frac{\partial f}{\partial y'} \eta(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx = - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx$$

Portanto,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) - \eta(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \eta(x) dx .$$

Como $\frac{\partial J}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0$ para o valor extremo e $\eta(x)$ é uma função arbitrária, então,

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 ,$$

que é a EQUAÇÃO DE EULER.

Esta é a condição NECESSÁRIA para J ter um valor extremo.

Exemplo 2: Podemos usar o cálculo variacional para resolver um problema na história da Física: a Brakistocrona. Considere uma partícula movendo-se em um campo de força constante partindo do repouso de algum ponto (x_1, y_1) para algum ponto mais abaixo (x_2, y_2) . Encontre o caminho que permite à partícula realizar o trânsito no menor tempo possível.

Resolução: Sejam, $T_o = 0$ e $U_o = 0$. Como F é conservativa, então $E = cte$. Temos

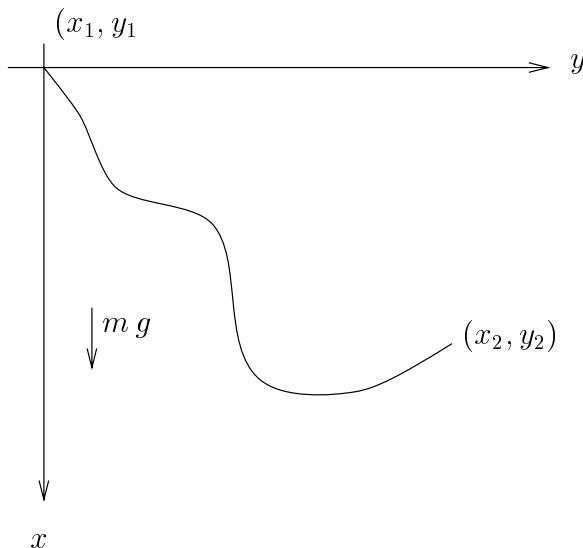


Figura 3.2: Exemplo 2.

assim,

$$E_o = T_o + U_o = 0 ; E = T + U .$$

Então,

$$\frac{1}{2} m v^2 - m g x = 0 \implies v^2 = 2 g x \implies v = \sqrt{2 g x} .$$

Mas,

$$v = \frac{ds}{dt} \implies dt = \frac{ds}{v} \implies t = \int_{x_1}^{x_2} \frac{(dx^2 + dy^2)^{1/2}}{\sqrt{2gx}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(1+y'^2)^{1/2}}{\sqrt{x}} dx.$$

Seja $f = \left(\frac{1+y'^2}{x}\right)^{1/2}$. Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 ; \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{[x(1+y'^2)]^{1/2}}.$$

Usando a Equação de Euler, temos,

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \implies \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial y'} = C = cte.$$

Seja $C = \frac{1}{\sqrt{2a}}$. Logo,

$$\frac{y'}{[x(1+y'^2)]^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} \implies y' = \frac{x}{\sqrt{2ax - x^2}}.$$

Seja $x = a(1 - \cos \theta)$, então, $dx = a \sin \theta d\theta$. E assim,

$$y = a \int_0^\theta (1 - \cos \theta) d\theta \implies y = a(\theta - \sin \theta).$$

Portanto,

$$\begin{cases} x = a(1 - \cos \theta) \\ y = a(\theta - \sin \theta) \end{cases} \quad (3.4)$$

As Equações (3.4) são as Equações Paramétricas para uma “ciclóide” passando pela origem.

Exemplo 3: Considere a superfície gerada pela revolução de uma linha conectando dois pontos fixos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em torno de um eixo coplanar com os dois pontos. Encontre a Equação da linha conectando os pontos tais que a superfície (área) gerada pela revolução, isto é, a área da superfície de revolução, é um mínimo.

Resolução:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] dx^2 \implies ds = (1+y'^2)^{1/2} dx$$

e,

$$dA = 2\pi x ds = 2\pi x (1+y'^2)^{1/2} dx \implies A = 2\pi \int x(1+y'^2)^{1/2} dx.$$

Seja $f = x(1+y'^2)^{1/2}$.

Então,

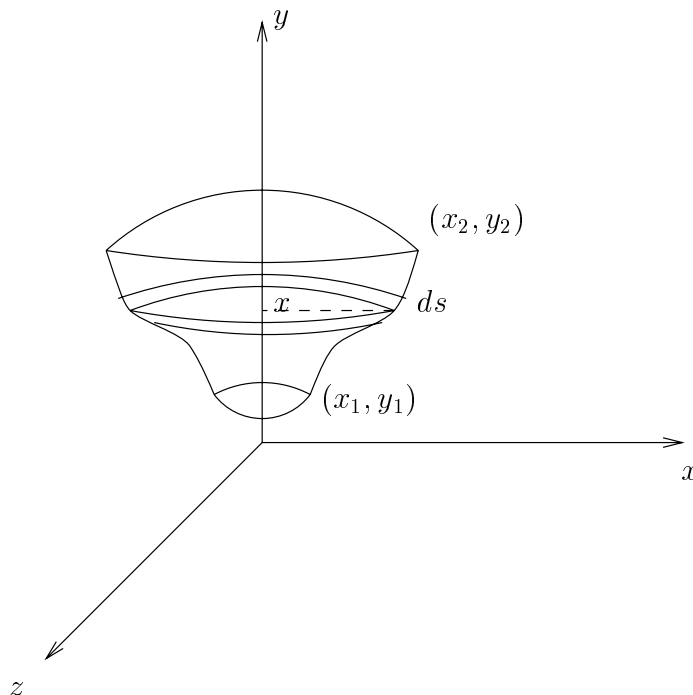


Figura 3.3: Exemplo 3.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 ; \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{x y'}{\sqrt{1 + y'^2}} .$$

Como,

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial y'} = \text{cte} = a .$$

Logo,

$$\frac{x y'}{(1 + y'^2)^{1/2}} = a \implies y' = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}} \implies y = \int \frac{a dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} .$$

Seja, $x = a \cosh \theta$. Então, $dx = a \sinh \theta d\theta$.

Assim,

$$x^2 - a^2 = a^2 \cosh^2 \theta - a^2 = a^2 (\cosh^2 \theta - 1) = a^2 \sinh^2 \theta$$

Logo,

$$y = \int \frac{a^2 \sinh \theta d\theta}{a \sinh \theta} = a \int d\theta \implies y = a \theta + b$$

Mas,

$$\frac{x}{a} = \cosh \theta \implies \theta = \cosh^{-1} \left(\frac{x}{a} \right)$$

Logo,

$$y = a \cosh^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + b \implies x = a \cosh \left(\frac{y-b}{a} \right). \quad (3.5)$$

A Equação (3.5) é a Equação da “Catenária”, a curva de uma corda flexível suspensa livremente entre dois pontos de suspensão.

3.4 A “Segunda Forma” da Equação de Euler

Uma segunda equação pode ser deduzida da Equação de Euler que é conveniente para funções que não são explicitamente dependentes de x , isto é, $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$.

Temos que

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(y, y', x) = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dx} = y' \frac{\partial f}{\partial y} + y'' \frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Assim,

$$y'' \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{df}{dx} - y' \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (3.6)$$

Mas,

$$\frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = y'' \frac{\partial f}{\partial y'} + y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right). \quad (3.7)$$

Substituindo (3.6) em (3.7), temos,

$$\frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \frac{df}{dx} - y' \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = -y' \overbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right)}^{=0} + \frac{df}{dx} - \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Então,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dx} - \frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \implies \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dx} \left[f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right].$$

Como f não depende explicitamente de x , $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Então,

$$\frac{d}{dx} \left[f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right] = 0$$

E, portanto,

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = cte . \quad (3.8)$$

A Equação (3.8) é a “Segunda Forma” da Equação de Euler.

Exemplo 4: Uma geodésica é uma linha que representa o menor caminho entre dois pontos quando o caminho é restrito a uma superfície particular. Encontre a geodésica sobre uma esfera.

Resolução:

O elemento de comprimento sobre a superfície de uma esfera de raio ρ é dado por,

$$ds^2 = dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Como é sobre a superfície, $dr = 0$. Então,

$$ds^2 = \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \implies ds = \rho (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta)^{1/2} d\phi ; \dot{\theta} = \frac{d\theta}{d\phi} .$$

Assim,

$$s = \rho \int_1^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta)^{1/2} d\phi$$

Se o caminho s é um mínimo, f é identificada como $f = (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta)^{1/2}$.

Usando a Equação (3.8), temos que $f - \dot{\theta} \frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}} = cte = a$.

Mas,

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta)^{-1/2} 2\dot{\theta} \implies \frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\dot{\theta}}{(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta)^{1/2}} .$$

Logo,

$$(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta)^{1/2} - \frac{\dot{\theta}^2}{(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta)^{1/2}} = a \implies \dot{\theta}^2 = \frac{\sin^4 \theta - a^2 \sin^2 \theta}{a^2} ,$$

isto é,

$$\dot{\theta}^2 = \frac{\sin^4 \theta}{a^2} (1 - a^2 \csc^2 \theta) \implies \dot{\theta} = \frac{\sin^2 \theta}{a} (1 - a^2 \csc^2 \theta)^{1/2} .$$

Como $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{d\phi} \implies d\phi = \frac{1}{\dot{\theta}} d\theta$.

Assim,

$$d\phi = \frac{a \csc^2 \theta d\theta}{(1 - a^2 \csc^2 \theta)} \implies \phi = \sin^{-1} \left(\frac{\cot \theta}{\beta} \right) + \alpha ,$$

$$\text{com, } \beta = \frac{1 - a^2}{a^2}$$

Então,

$$\frac{\cot \theta}{\beta} = \sin(\phi - \alpha) \implies \cot \theta = \beta \sin(\phi - \alpha) \implies \cos \theta = \beta (\sin \phi \cos \alpha - \sin \alpha \cos \phi) \sin \theta .$$

Multiplicando a última expressão por ρ , temos que

$$\rho \cos \theta = (\beta \cos \alpha) \rho \sin \theta \sin \phi - (\beta \sin \alpha) \rho \sin \theta \cos \phi .$$

Sejam, $A = \beta \cos \alpha$ e $B = \beta \sin \alpha$. Então,

$$\underbrace{\rho \cos \theta}_z = A \underbrace{(\rho \sin \theta \sin \phi)}_y - B \underbrace{(\rho \sin \theta \cos \phi)}_x .$$

Assim,

$$z = Ay - Bx , \tag{3.9}$$

que é a Equação de um Plano que passa pelo centro de uma esfera.

3.5 Funções com Várias Variáveis Dependentes

Se $f = f[y_1(x), y_1'(x), y_2(x), y_2'(x), \dots, x]$, ou simplesmente, $f = f[y_i(x), y_i'(x); x]$, com $i = 1, 2, \dots, n$, em analogia com a Equação (3.1), podemos escrever,

$$y_i(\alpha, x) = y_i(0, x) + \alpha \eta_i(x)$$

E assim,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i'} \right) \right] \eta_i(x) dx .$$

Como, $\left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$, então,

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_i'} = 0 , \tag{3.10}$$

onde, $i = 1, 2, \dots, n$.

A Equação (3.10) nos dá a expressão geral da Equação de Euler, isto é, a Equação de Euler para o caso de funções com várias variáveis dependentes.

3.6 Equações de Euler quando condições auxiliares são impostas

Suponhamos que queremos encontrar, por exemplo, o caminho mais curto entre dois pontos sobre uma superfície. Então, em adição às condições já discutidas, existe a condição que o caminho deve satisfazer a equação da superfície, isto é,

$$g[y_i; x] = 0$$

Mas, no caso geral, devemos fazer o uso explícito das equações auxiliares. Estas equações são chamadas de EQUAÇÕES DE VÍNCULO.

Considere o caso em que,

$$f = f[y_i, y'_i; x] = f[y, y', z, z'; x]$$

Então,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z'} \right) \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right] dx .$$

Mas,

$$\begin{cases} y(\alpha, x) = y(x) + \alpha \eta_1(x) \\ z(\alpha, x) = z(x) + \alpha \eta_2(x) \end{cases} \quad (3.11)$$

Logo,

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta_1(x) \quad e \quad \frac{\partial z}{\partial \alpha} = \eta_2(x) ,$$

e,

$$g[y_i; x] = g[y, z; x] = 0 \quad (3.12)$$

Assim,

$$dg = \left(\frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right) d\alpha = 0 .$$

Então,

$$\left[\frac{\partial g}{\partial y} \eta_1(x) + \frac{\partial g}{\partial z} \eta_2(x) \right] d\alpha = 0 \implies \frac{\partial g}{\partial y} \eta_1(x) = -\frac{\partial g}{\partial z} \eta_2(x) ,$$

e,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta_1(x) + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z'} \right) \eta_2(x) \right] dx ,$$

então,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \eta_1(x) \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z'} \right) \frac{\eta_2(x)}{\eta_1(x)} \right] dx .$$

Portanto,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \eta_1(x) \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z'} \right) \frac{\partial g / \partial y}{\partial g / \partial z} \right] dx .$$

Como $\frac{\partial J}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0$, temos que,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^{-1} = \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z'} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial z} \right)^{-1} . \quad (3.13)$$

O lado esquerdo da Equação (3.13) envolve apenas derivadas de f e g com relação à y e y' enquanto no lado direito, envolve apenas derivadas de f e g com relação à z e z' . Como y e z são funções de x , temos que:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^{-1} = -\lambda(x) \\ \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z'} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial z} \right)^{-1} = -\lambda(x) \end{cases} \quad (3.14)$$

E assim,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} + \lambda(x) \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z'} + \lambda(x) \frac{\partial g}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

A solução completa para o problema agora depende de encontrar três funções: $y(x)$, $z(x)$ e $\lambda(x)$.

Existem três relações que devem ser usadas: as duas equações (3.15) e a equação de vínculo (3.12). Assim, existe um número suficiente de relações que permitem uma solução completa.

$\lambda(x)$ é conhecida como MULTIPLICADOR DE LAGRANGE.

De uma maneira geral,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_i} + \sum_j \lambda_j(x) \frac{\partial g_j}{\partial y_i} = 0 \\ g_j[y_i; x] = 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

onde,

$$g_j[y_i; x] = 0 \implies \sum_j \frac{\partial g_j}{\partial y_i} dy_i = 0 .$$

3.7 Alguns Problemas Resolvidos

01) Mostre que a menor distância entre dois pontos sobre um plano é uma linha reta.

Resolução:

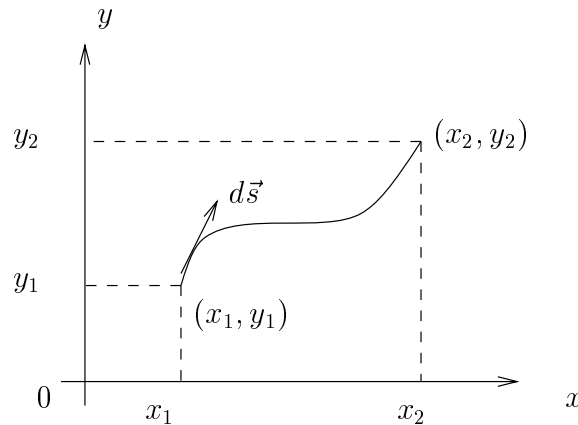


Figura 3.4: Problema 1.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \implies ds = (1 + y'^2)^{1/2} dx \implies s = \int_{x_1}^{x_2} (1 + y'^2)^{1/2} dx .$$

Seja $f = (1 + y'^2)^{1/2}$. Então, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{(1 + y'^2)^{1/2}}$.

Como, $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$, então,

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial y'} = cte = a .$$

Portanto,

$$\frac{y'}{(1+y'^2)^{1/2}} = a \implies y' = \frac{a}{(1-a^2)^{1/2}} = C.$$

Assim,

$$y = Cx + D \quad (3.17)$$

que é a Equação de uma Linha Reta.

02) Mostre que a menor distância entre dois pontos em um espaço tridimensional é uma linha reta.

Resolução:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \implies ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \implies s = \int_{t_1}^{t_2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{1/2} dt.$$

Seja, $f = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{1/2}$.

$$\text{Como, } \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \text{e, } \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_i} = 0, \quad \text{então,}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} = 0 \end{array} \right.$$

ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = c_1 \\ \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = c_2 \\ \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} = c_3 \end{array} \right.$$

Mas,

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} = \frac{\dot{y}_i}{[\sum_i (\dot{y}_i)^2]^{1/2}}.$$

Logo,

$$\frac{\dot{y}_i}{[\sum_i (\dot{y}_i)^2]^{1/2}} = c_i ; i = 1, 2, 3 .$$

Portanto,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{c_1}{c_2} \\ \frac{\dot{x}}{\dot{z}} = \frac{c_1}{c_3} \\ \frac{\dot{y}}{\dot{z}} = \frac{c_2}{c_3} \end{array} \right.$$

E assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} (y - y_1) = \frac{c_2}{c_1} (x - x_1) \\ (z - z_1) = \frac{c_3}{c_1} (x - x_1) \\ (z - z_1) = \frac{c_3}{c_2} (y - y_1) \end{array} \right.$$

No ponto $P = (x_2, y_2)$, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(y - y_1)}{(y_2 - y_1)} = \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} \\ \frac{(z - z_1)}{(z_2 - z_1)} = \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} \\ \frac{(z - z_1)}{(z_2 - z_1)} = \frac{(y - y_1)}{(y_2 - y_1)} \end{array} \right.$$

Portanto,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} , \quad (3.18)$$

que é a Equação de uma Linha Reta no espaço tridimensional, passando pelos pontos (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) .

03) Considere a luz passando de um meio com índice de refração n_1 para um outro com índice de refração n_2 . Use o Princípio de Fermat para minimizar o tempo, e deduza a Lei da Refração: $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$.

Resolução:

Temos que,

$$n = \frac{c}{v} \implies n_i = \frac{c}{v_i} ,$$

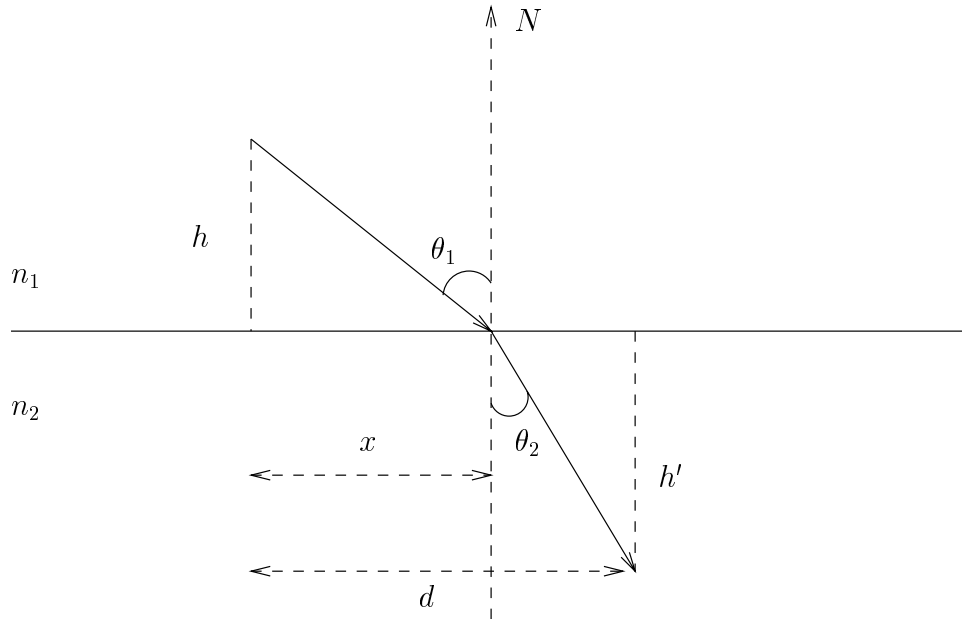


Figura 3.5: Problema 3.

e o tempo de viagem é,

$$t = \frac{\overline{AP}}{v_1} + \frac{\overline{PB}}{v_2},$$

onde,

$$\overline{AP} = (h^2 + x^2)^{1/2}; \quad \overline{PB} = [h'^2 + (d-x)^2]^{1/2}; \quad v_1 = \frac{c}{n_1} \text{ e } v_2 = \frac{c}{n_2}.$$

Assim,

$$t = \frac{n_1}{c} (h^2 + x^2)^{1/2} + \frac{n_2}{c} [h'^2 + (d-x)^2]^{1/2} \implies \frac{dt}{dx} = \frac{n_1 x}{c (h^2 + x^2)^{1/2}} - \frac{n_2 (d-x)}{c [h'^2 + (d-x)^2]^{1/2}} = 0,$$

então,

$$\frac{n_1 x}{(h^2 + x^2)^{1/2}} = \frac{n_2 (d-x)}{[h'^2 + (d-x)^2]^{1/2}}.$$

$$\text{Mas, } \sin \theta_1 = \frac{x}{(h^2 + x^2)^{1/2}} \quad \text{e} \quad \sin \theta_2 = \frac{d-x}{[h'^2 + (d-x)^2]^{1/2}}.$$

Logo,

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

04) Encontre as dimensões do paralelepípedo de volume máximo circunscrito por uma esfera de raio R .

Resolução:

Sejam as dimensões do paralelepípedo: a_1, b_1, c_1 .

Então,

$$V = a_1 b_1 c_1$$

Queremos maximizar este volume sob a condição que o paralelepípedo está circunscrito por uma esfera de raio R , isto é,

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 4R^2$$

Assim, a condição de vínculo,

$$g[a_1, b_1, c_1] = 0 \implies a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - 4R^2 = 0.$$

Então, usando as equações de Euler com vínculo, isto é,

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_i'} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y_i} = 0,$$

temos,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1 c_1 ; \quad \frac{\partial V}{\partial b_1} = a_1 c_1 ; \quad \frac{\partial V}{\partial c_1} = a_1 b_1 \\ \frac{\partial V}{\partial a_1} = \frac{\partial V}{\partial b_1} = \frac{\partial V}{\partial c_1} = 0 \end{array} \right.$$

Também,

$$\frac{\partial g}{\partial a_1} = 2a_1 ; \quad \frac{\partial g}{\partial b_1} = 2b_1 ; \quad \frac{\partial g}{\partial c_1} = 2c_1.$$

Logo,

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 c_1 + \lambda 2a_1 = 0 \implies a_1 b_1 c_1 + 2\lambda a_1^2 = 0 \\ a_1 c_1 + \lambda 2b_1 = 0 \implies a_1 b_1 c_1 + 2\lambda b_1^2 = 0 \\ a_1 b_1 + \lambda 2c_1 = 0 \implies a_1 b_1 c_1 + 2\lambda c_1^2 = 0 \end{array} \right.$$

Então,

$$3 a_1 b_1 c_1 + 2 \lambda \underbrace{(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)}_{4 R^2} = 0 \implies 3 a_1 b_1 c_1 = -8 \lambda R^2 \implies \lambda = -\frac{3 a_1 b_1 c_1}{8 R^2}.$$

Assim,

$$a_1 = b_1 = c_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} R.$$

Portanto, as dimensões do paralelepípedo (na verdade um cubo), são, $a_1 = b_1 = c_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} R$.

05) Encontre a razão, $\frac{R}{H}$, do raio, R , para a altura, H , de um cilindro circular reto de volume fixo V que minimiza a área superficial A do cilindro.

Resolução:

Temos que,

$$V = \pi R^2 H \text{ e } A = A_{bases} + A_{lateral} = 2 \pi R^2 + 2 \pi R H.$$

A área superficial, A , ser mínimo, significa,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A}{\partial R} - \frac{d}{dx} \underbrace{\frac{\partial A}{\partial \dot{R}}}_{=0} + \lambda \frac{\partial g}{\partial R} = 0 \\ \frac{\partial A}{\partial H} - \frac{d}{dx} \underbrace{\frac{\partial A}{\partial \dot{H}}}_{=0} + \lambda \frac{\partial g}{\partial H} = 0 \\ g = V - \pi R^2 H = 0 \end{array} \right.$$

Como,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A}{\partial R} = 4 \pi R + 2 \pi H \quad ; \quad \frac{\partial A}{\partial H} = 2 \pi R \\ \frac{\partial g}{\partial R} = -2 \pi R H \quad ; \quad \frac{\partial g}{\partial H} = -\pi R^2 \end{array} \right.$$

Logo,

$$4 \pi R + 2 \pi H + \lambda (-2 \pi R H) = 0 \implies 2 R + H = R H \lambda \implies \lambda = \frac{2 R + H}{R H},$$

e,

$$2\pi R + \lambda(-\pi R^2) = 0 \implies \lambda R = 2 \implies \lambda = \frac{2}{R}.$$

Portanto,

$$\frac{2}{R} = \frac{2R + H}{RH} \implies \frac{R}{H} = 1/2.$$

4

Princípio de Hamilton - Dinâmica Lagrangeana e Hamiltoniana

4.1 Introdução

O movimento de uma partícula em um Referencial Inercial é corretamente descrito pela Equação Newtoniana,

$$\vec{F} = \vec{p}$$

Em situações particulares pode ser difícil ou mesmo impossível obter expressões explícitas para as forças de vínculo. Para resolver um problema usando o formalismo Newtoniano, devemos conhecer todas as forças, porque a quantidade \vec{F} que aparece na Equação Fundamental é a Força Total atuante sobre um corpo.

Para vencer algumas dificuldades práticas surgem formalismos alternativos na tentativa de aplicar as Equações de Newton em problemas especiais. Assim, para obter uma simplificação precisamos, não formular uma nova Teoria da Mecânica - a Teoria Newtoniana é bastante correta - mas apenas um método alternativo de tratar com problemas complicados de uma maneira geral. Um tal método está contido no Princípio de Hamilton, e as Equações de Movimento resultantes da aplicação deste Princípio, são chamadas EQUAÇÕES DE LAGRANGE.

O Princípio de Hamilton é um dos mais elegantes e profundos Princípios da Teoria Física.

4.2 Princípio de Hamilton

Princípios minimais em Física tem uma longa e interessante história. A origem para tais Princípios está na noção que a natureza sempre minimiza certas quantidades importantes quando um processo físico ocorre.

O primeiro destes Princípios foi desenvolvido no campo da Óptica. Hero de Alexandria, encontrou que a Lei que governa a Reflexão da luz pode ser obtida supondo que um raio de luz viajando de um ponto para outro pela Reflexão de um espelho plano, sempre segue o caminho mais curto possível. Uma simples construção geométrica verifica que este Princípio mínimo na verdade leva à igualdade dos ângulos de Incidência e de Reflexão para um raio de luz sobre um espelho plano. O Princípio de Hero do “caminho mais curto”, não pôde, contudo, fornecer uma lei correta para a Refração. Em 1657, Pierre de Fermat reformulou o Princípio, postulando que um raio de luz sempre viaja de um ponto a outro num meio por um caminho que requer o menor tempo. O Princípio de Fermat do “menor tempo” leva imediatamente, não só à Lei correta da Reflexão, mas também à Lei de Snell da Refração.

Em dois trabalhos publicados em 1834 e 1835, Hamilton anunciou o Princípio Dinâmico sobre o qual é possível basear toda a Mecânica, e, na verdade, muito da Física Clássica.

O Princípio de Hamilton pode ser formulado como segue:

“De todos os possíveis caminhos ao longo dos quais um Sistema Dinâmico pode mover-se de um ponto à outro num intervalo de tempo especificado (consistente com qualquer vínculo), o caminho real seguido é aquele que minimiza a integral temporal da diferença entre as Energias Cinética e Potencial”, isto é,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0 . \quad (4.1)$$

Esta afirmação requer apenas que a integral de $T - U$ seja um extremo, não necessariamente um Mínimo. Mas, em quase todas as aplicações importantes em Dinâmica, a condição de Mínimo ocorre.

A Energia Cinética de uma partícula expressa em coordenadas retangulares fixas, é uma função só de \dot{x}_i , e se a partícula move-se em um campo de força conservativo, a energia potencial é uma função só de x_i :

$$T = T(\dot{x}_i) \text{ e } U = U(x_i) .$$

Se definirmos a diferença dessas quantidades como,

$$L = T - U = L(\dot{x}_i, x_i) . \quad (4.2)$$

Então, a Equação (4.1), torna-se,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{x}_i, x_i) dt = 0 , \quad (4.3)$$

ou,

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} f[y_i, \dot{y}_i; x] dx = 0 .$$

Se fizermos as transformações:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow t \\ y_i(x) \rightarrow x_i(t) \\ \dot{y}_i(t) \rightarrow \dot{x}_i(t) \\ f[y_i(t), \dot{y}_i(t); x] \rightarrow L(x_i, \dot{x}_i) \end{array} \right. ,$$

as Equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} = 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3, \dots, n ,$$

correspondentes à Equação (4.3) são, portanto,

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3, \dots, n . \quad (4.4)$$

Estas são as EQUAÇÕES DO MOVIMENTO DE LAGRANGE para a partícula, e a quantidade L é chamada de FUNÇÃO DE LAGRANGE ou LAGRANGIANA para a partícula.

Para exemplificar, vamos obter a Equação de Lagrange do Movimento de um Oscilador Harmônico Unidimensional, ou seja,

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 .$$

Temos que,

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -k x \quad e \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \ddot{x} .$$

Logo,

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \implies -k x - m \ddot{x} = 0 \implies m \ddot{x} + k x = 0 ,$$

que é igual à Equação do Movimento obtida usando a Mecânica Newtoniana.

Consideremos agora o Pêndulo Plano.

Temos que,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = l \sin \theta \implies \dot{x} = l \dot{\theta} \cos \theta \implies \dot{x}^2 = l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta \\ y = l \cos \theta \implies \dot{y} = -l \dot{\theta} \sin \theta \implies \dot{y}^2 = l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \end{array} \right. ,$$

Assim,

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \implies T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 .$$

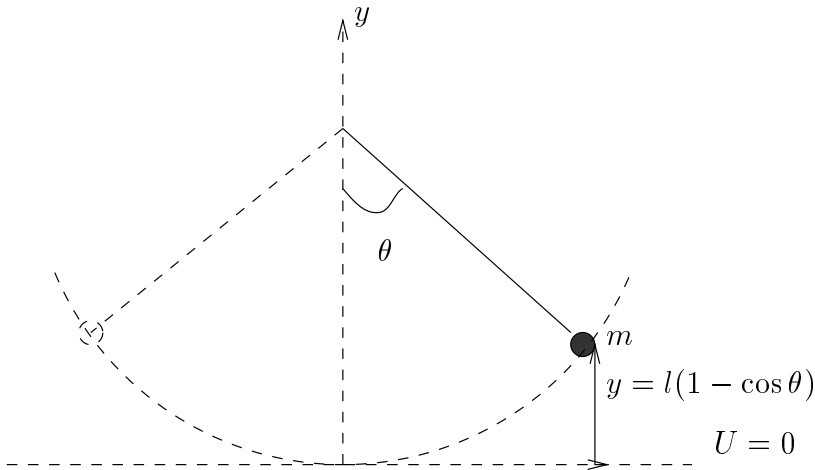


Figura 4.1: Pêndulo Plano.

Também,

$$U = m g y ; y = l(1 - \cos \theta) ,$$

e então,

$$U = m g l(1 - \cos \theta)$$

Logo,

$$L = T - U \implies L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - m g l(1 - \cos \theta) .$$

Então,

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m g l \sin \theta ; \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \dot{\theta} \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \ddot{\theta} .$$

Logo,

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \implies -m g l \sin \theta - m l^2 \ddot{\theta} = 0 \implies \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 .$$

Outra importante característica do método é que em parte alguma do cálculo há qualquer menção com respeito à Força. As Equações do Movimento foram obtidas apenas especificando certas propriedades associadas com a partícula - as Energias Cinética e Potencial - e sem a necessidade de explicitamente levar em conta o fato que existe um agente externo atuando sobre a partícula - A Força. Portanto, como a Energia pode ser definida independentemente dos conceitos Newtonianos, o Princípio de Hamilton permite-nos calcular a Equação do Movimento de um corpo, completamente, sem recorrer à Teoria Newtoniana.

4.3 Coordenadas Generalizadas

Consideremos um Sistema Mecânico Geral consistindo de uma coleção de n partículas pontuais discretas, algumas das quais podem ser conectadas para formar corpos rígidos. Para especificar o estado de tal sistema num dado tempo, é necessário usar n raios vetores. Como cada raio vetor consiste de uma trinca (por exemplo, as coordenadas retangulares), $3n$ quantidades devem ser especificadas para descrever as posições de todas as partículas. Se existem equações de vínculo que relaciona algumas dessas coordenadas às outras (por exemplo, se algumas das partículas estiverem conectadas para formar corpos rígidos ou se o movimento fosse limitado a estar ao longo de algum caminho ou sobre alguma superfície), então nem todas as $3n$ coordenadas são independentes. Na verdade, se existem m equações de vínculo, então $(3n - m)$ coordenadas são independentes, e o sistema é dito possuir $(3n - m)$ graus de liberdade.

Damos o nome de Coordenadas Generalizadas à qualquer conjunto de quantidades que especificam completamente o estado de um sistema.

As Coordenadas Generalizadas são comumente escritas como q_1, q_2, \dots , ou simplesmente como q_j . Um conjunto de Coordenadas Generalizadas independentes cujo número é igual ao número s de graus de liberdade do sistema e não sujeito à vínculos, é chamado UM CONJUNTO PRÓPRIO de Coordenadas Generalizadas.

A escolha de um conjunto de Coordenadas Generalizadas para descrever um sistema não é única; existem, em geral, muitos conjuntos de quantidades que especificam completamente o estado de um dado sistema. Infelizmente não temos regras gerais para selecionar o conjunto de Coordenadas Generalizadas “mais conveniente” para um dado problema. Uma certa habilidade deve ser desenvolvida através da experiência. Também, podemos definir um conjunto de quantidades consistindo das derivadas temporais de $q_j : \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots$, ou simplesmente \dot{q}_j . De maneira análoga, chamamos \dot{q}_j de Velocidades Generalizadas.

Se considerarmos que as equações conectando $x_{\alpha i}$ e q_j contém explicitamente o tempo, então o conjunto de equações de transformações são dadas por,

$$x_{\alpha i} = x_{\alpha i}(q_1, q_2, \dots, q_s, t) = x_{\alpha i}(q_j, t); \alpha = 1, 2, \dots, n; i = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, s.$$

Em geral, as componentes retangulares das velocidades dependem das Coordenadas Generalizadas, das velocidades Generalizadas, e do tempo, isto é,

$$\dot{x}_{\alpha i} = \dot{x}_{\alpha i}(q_j, \dot{q}_j, t) \quad .$$

Podemos também escrever a transformação inversa como,

$$q_j = q_j(x_{\alpha i}, t); \dot{q}_j = \dot{q}_j(x_{\alpha i}, \dot{x}_{\alpha i}, t).$$

Também, existem $m = 3n - s$ equações de vínculo de forma, $f_k(x_{\alpha i}, t) = 0$, com $k = 1, 2, \dots, m$

EXEMPLO 1: Use o sistema de coordenadas (x, y) da Figura (4.2) para encontrar a energia cinética T , a energia potencial U e a Lagrangeana L , para um pêndulo simples de comprimento l e massa m , movendo-se no plano xy . Determine as equações de transformação do sistema retangular (x, y) para a coordenada θ . Encontre a Equação do Movimento.

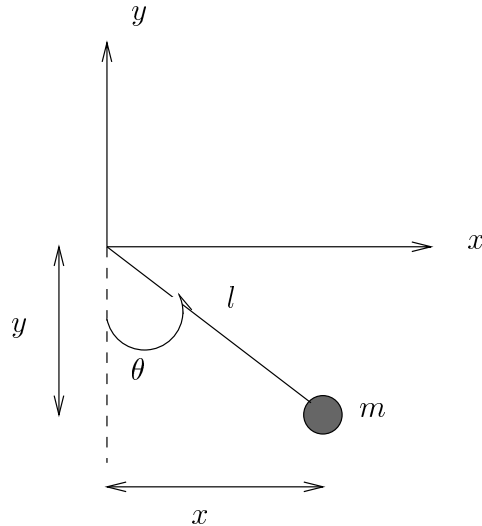


Figura 4.2: Exemplo1.

Resolução:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) ; U = m g h .$$

Assim,

$$L = T - U = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - m g h .$$

Mas,

$$\begin{cases} x = l \sin \theta \implies \dot{x} = l \dot{\theta} \cos \theta \\ y = -l \cos \theta \implies \dot{y} = l \dot{\theta} \sin \theta \end{cases}$$

Logo,

$$L = \frac{1}{2} m (l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta) + m g l \cos \theta \implies L = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 + m g l \cos \theta .$$

Temos que,

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m g l \sin \theta ; \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \dot{\theta} \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \ddot{\theta} .$$

Logo,

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \implies \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 .$$

EXEMPLO 2: Considere o caso do movimento de projéteis sob gravidade em duas dimensões, como mostra a Figura (4.3). Encontre as Equações de Movimento em coordenadas retangular e polar.

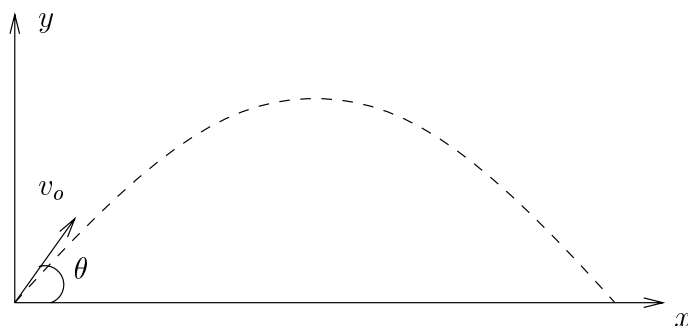


Figura 4.3: Exemplo2.

Resolução:

Em coordenadas retangulares,

$$\left\{ \begin{array}{l} T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ U = m g y \end{array} \right.$$

Em $y = 0$, $U = 0$. Temos então que,

$$L = T - U = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - m g y ,$$

e,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \ddot{x} \end{array} \right.$$

Também,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial y} = -m g \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m \dot{y} \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m \ddot{y} \end{array} \right.$$

Assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \implies \ddot{x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0 \implies \ddot{y} = -g \end{array} \right.$$

Em coordenadas polares,

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta \implies v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 .$$

Então,

$$\left\{ \begin{array}{l} T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 \\ U = m g r \sin \theta \end{array} \right.$$

Em $\theta = 0$, $U = 0$. Portanto,

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - m g r \sin \theta .$$

Logo,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \theta} = -m g r \cos \theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2 m r \dot{r} \dot{\theta} + m r^2 \ddot{\theta} \end{array} \right.$$

e,

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot{\theta}^2 - m g \sin \theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \ddot{r} \end{cases}$$

Portanto,

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \implies r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} + g \cos \theta = 0,$$

e,

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 0 \implies \ddot{r} + g \sin \theta - r \dot{\theta}^2 = 0.$$

Vemos assim que as Equações de Movimento são mais simples quando usamos as coordenadas retangulares como Coordenadas Generalizadas. Isso se deve ao fato da Energia Potencial só depender da coordenada y em coordenadas retangulares enquanto que em coordenadas polares, depende de r e θ .

EXEMPLO 3: Uma partícula de massa m é forçada a mover-se sobre a superfície interna de um cone liso de meio ângulo α , como mostra a Figura (4.4). A partícula está sujeita à força gravitacional. Escolha um conjunto de Coordenadas Generalizadas e determine os Vínculos. Encontre as equações de Movimento de Lagrange.

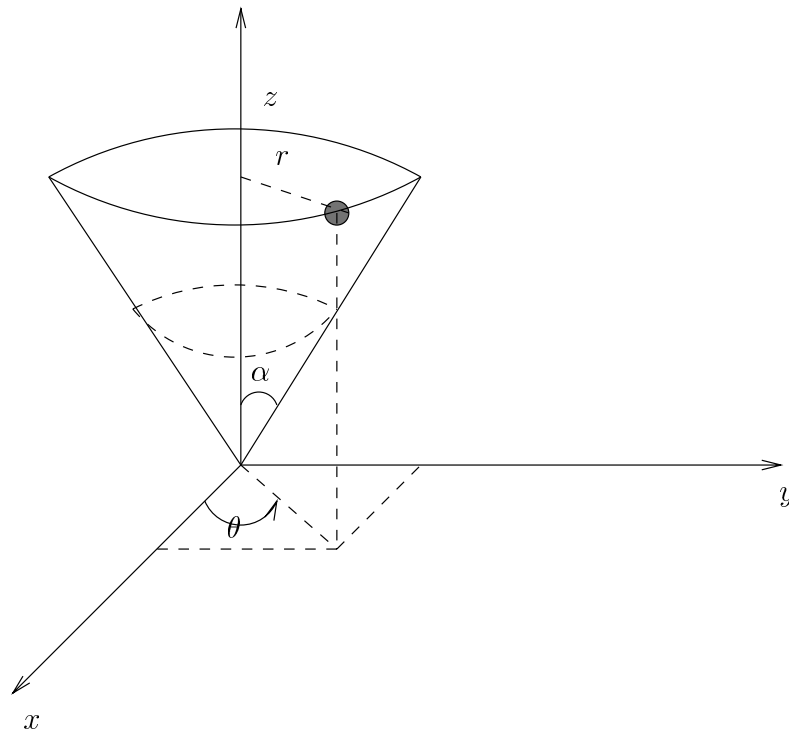


Figura 4.4: Exemplo3.

Resolução:

Seja o eixo z o eixo do cone e o ápice esteja localizado na origem. Como o problema possui simetria cilíndrica, escolhamos r , θ e z como as Coordenadas Generalizadas. Temos, também, a equação de vínculo,

$$z = r \cot \alpha \implies \dot{z} = \dot{r} \cot \alpha$$

Assim, só existem dois graus de liberdade para o sistema, e portanto, só duas Coordenadas Generalizadas próprias.

Em coordenadas cilíndricas,

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{z} \hat{e}_z \implies v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 = \dot{r}^2 \csc^2 \alpha + r^2 \dot{\theta}^2.$$

Temos que,

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 \csc^2 \alpha + r^2 \dot{\theta}^2) \\ U = m g z = m g r \cot \alpha \end{cases}$$

Então,

$$L = T - U = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 \csc^2 \alpha + r^2 \dot{\theta}^2) - m g r \cot \alpha$$

Assim,

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \end{cases}$$

Como,

$$\overbrace{\frac{\partial L}{\partial \theta}}^{=0} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \implies \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = cte.$$

Portanto,

$$m r^2 \dot{\theta} = cte \tag{4.5}$$

Mas, $m r^2 \dot{\theta} = L_z$, o Momento Angular em torno do eixo z . Portanto a Equação (4.5) expressa a CONSERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR em torno do eixo de simetria do sistema.

Também,

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot{\theta}^2 - m g \cot \alpha \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \csc^2 \alpha \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \ddot{r} \csc^2 \alpha \end{cases}$$

Aplicando as Equações de Lagrange, obtemos

$$\ddot{r} + g \sin \alpha \cos \alpha - r \dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha = 0$$

EXEMPLO 4: O ponto de suporte de um pêndulo simples de comprimento b move-se sobre uma borda sem massa, de raio a , girando com velocidade angular constante ω . Obtenha a expressão para as componentes cartesianas da velocidade e aceleração da massa m . Obtenha também a aceleração angular para o ângulo θ mostrado na Figura (4.5).

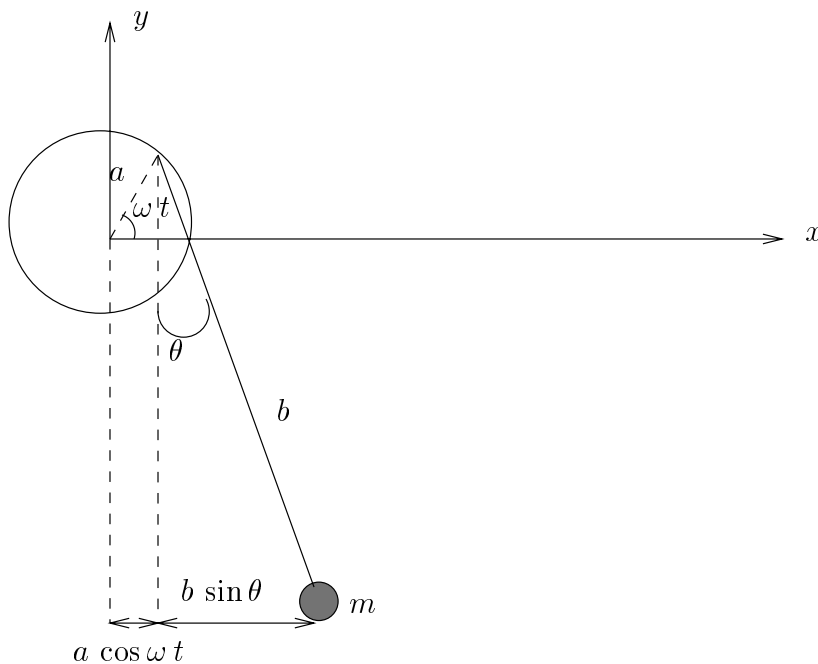


Figura 4.5: Exemplo4.

Resolução:

$$\begin{cases} x = a \cos(\omega t) + b \sin \theta \\ y = a \sin(\omega t) - b \cos \theta \end{cases}$$

Temos que,

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 = \frac{1}{2} m [a^2 \omega^2 + b^2 \dot{\theta}^2 + 2 a b \omega \dot{\theta} \sin(\theta - \omega t)],$$

e,

$$U = m g y = m g (a \sin \omega t - b \cos \theta).$$

Logo,

$$L = T - U = \frac{1}{2} m [a^2 \omega^2 + b^2 \dot{\theta}^2 + 2 a b \omega \dot{\theta} \sin(\theta - \omega t)] - m g (a \sin \omega t - b \cos \theta),$$

Como,

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m g b \sin \theta + m a b \omega \dot{\theta} \cos(\theta - \omega t),$$

e,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m b^2 \dot{\theta} + m a b \omega \sin(\theta - \omega t) \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m b^2 \ddot{\theta} + m a b \omega \cos(\theta - \omega t) (\dot{\theta} - \omega),$$

portanto,

$$\ddot{\theta} - \frac{a \omega^2}{b} \cos(\theta - \omega t) + \frac{g}{b} \sin \theta = 0.$$

Note que este resultado reduz-se ao de um pêndulo simples se $\omega = 0$.

Também,

$$\begin{cases} \dot{x} = -a \omega \sin(\omega t) + b \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{y} = a \omega \cos(\omega t) + b \dot{\theta} \sin \theta \end{cases}$$

e,

$$\begin{cases} \ddot{x} = -a \omega^2 \cos(\omega t) - b \dot{\theta}^2 \sin \theta + b \ddot{\theta} \cos \theta \\ \ddot{y} = -a \omega^2 \sin(\omega t) + b \dot{\theta}^2 \cos \theta + b \ddot{\theta} \sin \theta \end{cases}$$

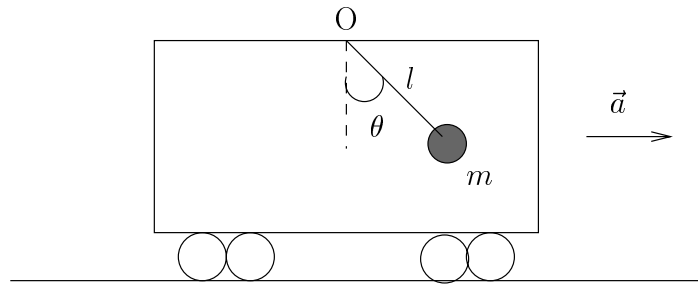


Figura 4.6: Exemplo 5.

EXEMPLO 5: Encontre a frequência das pequenas oscilações de um pêndulo simples colocado em um trilho em um carro que tem uma aceleração constante a na direção x , conforme mostra a Figura (4.6).

Resolução:

Escolhendo um sistema de coordenadas cartesianas fixo com $x = 0$ e $\dot{x} = v_o$ em $t = 0$, temos,

$$\begin{cases} x = l \sin \theta + v_o t + \frac{1}{2} a t^2 \\ y = -l \cos \theta \end{cases}$$

e,

$$\begin{cases} \dot{x} = l \dot{\theta} \cos \theta + v_o + a t \\ \dot{y} = l \dot{\theta} \sin \theta \end{cases}$$

Logo,

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \implies T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m (v_o^2 + a^2 t^2 + 2 v_o a t) + m l \dot{\theta} (v_o + a t) \cos \theta ,$$

e,

$$U = m g y \implies U = -m g l \cos \theta .$$

Como $L = T - U$, então,

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m (v_o^2 + a^2 t^2 + 2 v_o a t) + m l \dot{\theta} (v_o + a t) \cos \theta + m g l \cos \theta .$$

Assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \theta} = -m l \dot{\theta} (v_o + a t) \sin \theta - m g l \sin \theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \dot{\theta} + m l (v_o + a t) \cos \theta \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \ddot{\theta} + m l a \cos \theta - m l \dot{\theta} (v_o + a t) \sin \theta \end{array} \right.$$

Usando as Equações de Lagrange, isto é,

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0,$$

encontramos,

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta - \frac{a}{l} \cos \theta$$

Para o ângulo de equilíbrio, $\theta = \theta_e$, temos que, $\ddot{\theta} = 0$. Logo,

$$\frac{g}{l} \sin \theta_e + \frac{a}{l} \cos \theta_e = 0 \implies \tan \theta_e = -\frac{a}{g}.$$

Como as oscilações são pequenas e em torno do ângulo de equilíbrio, façamos, $\theta = \theta_e + \eta$, onde η é um ângulo pequeno. Assim, $\dot{\theta} = \dot{\eta}$ e $\ddot{\theta} = \ddot{\eta}$.

Logo,

$$\ddot{\eta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta_e + \eta) - \frac{a}{l} \cos(\theta_e + \eta).$$

Mas,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(\theta_e + \eta) = \sin \theta_e \cos \eta + \sin \eta \cos \theta_e \\ \cos(\theta_e + \eta) = \cos \theta_e \cos \eta - \sin \theta_e \sin \eta \end{array} \right.$$

Considerando que para ângulos pequenos, $\sin \eta \equiv \eta$ e $\cos \eta \equiv 1$, então,

$$\ddot{\eta} = -\frac{g}{l} (\sin \theta_e + \eta \cos \theta_e) - \frac{a}{l} (\cos \theta_e - \eta \sin \theta_e) \implies \ddot{\eta} = -\frac{\eta}{l} (g \cos \theta_e - a \sin \theta_e)$$

Como, $\tan \theta_e = -\frac{a}{g}$ então, $\sin \theta_e = -\frac{a}{g} \cos \theta_e$. Logo,

$$\ddot{\eta} = -\frac{\eta}{l} (g \cos \theta_e + \frac{a^2}{g} \cos \theta_e) = -\frac{\eta}{g l} \cos \theta_e (g^2 + a^2)$$

Mas,

$$\cos \theta_e^2 = 1 - \sin \theta_e^2 \implies \cos \theta_e^2 = 1 - \frac{a^2}{g^2} \cos \theta_e^2 \implies \cos \theta_e = \frac{g}{\sqrt{g^2 + a^2}}$$

Assim,

$$\ddot{\eta} = -\frac{\eta}{gl} \frac{g}{\sqrt{g^2 + a^2}} (g^2 + a^2) \implies \ddot{\eta} + \frac{\sqrt{g^2 + a^2}}{l} \eta = 0,$$

que é análoga à Equação Diferencial de um Pêndulo Simples,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0,$$

cuja frequência é $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

No nosso caso, $\omega^2 = \frac{\sqrt{g^2 + a^2}}{l}$. Observe que, quando $a \rightarrow 0 \Rightarrow \omega \rightarrow \sqrt{\frac{g}{l}}$.

EXEMPLO 6: Uma conta escorrega ao longo de um fio liso dobrado na forma de uma parábola $z = cr^2$. A conta gira em um círculo de raio R , enquanto o fio gira em torno de seu eixo vertical de simetria, com velocidade angular ω . Encontre o valor de c .

Resolução:

Em coordenadas cilíndricas,

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{z} \hat{e}_z \implies v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2.$$

Como, $z = cr^2 \Rightarrow \dot{z} = 2cr\dot{r}$. Então,

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + 4c^2 r^2 \dot{r}^2,$$

e $\omega = \dot{\theta}$. Assim,

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \omega^2 + 4c^2 r^2 \dot{r}^2).$$

Se para $z = 0$, $U = 0$, então, $U = mgcr^2$.

Como, $L = T - U$, então,

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \omega^2 + 4c^2 r^2 \dot{r}^2) - mgcr^2.$$

Mas,

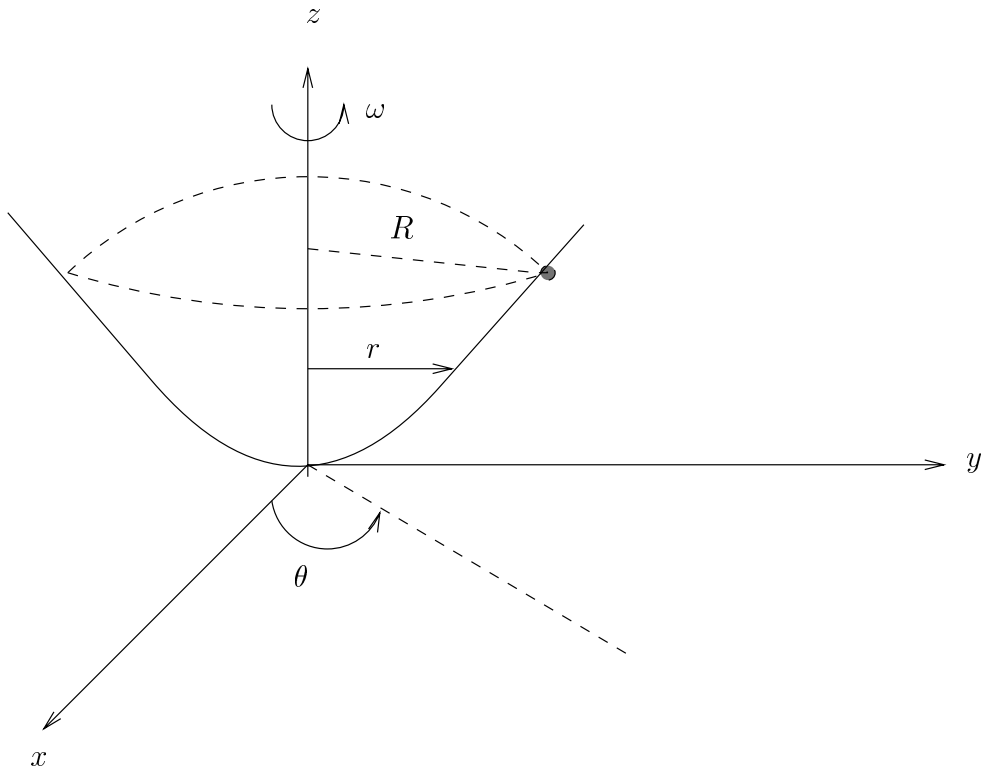


Figura 4.7: Exemplo6.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial r} = m r \omega^2 + 4 m c^2 r \dot{r}^2 - 2 m g c r \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} + 4 m c^2 r^2 \dot{r} \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \ddot{r} + 8 m c^2 r \dot{r}^2 + 4 m c^2 r^2 \ddot{r} \end{array} \right.$$

Usando as Equações de Lagrange, temos,

$$\ddot{r}(1 + 4 c^2 r^2) + 4 c^2 r \dot{r}^2 + r(2 g c - \omega^2) = 0 .$$

Como a conta gira em um círculo de raio R , então, $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ e $r = R$. Logo,

$$R(2 g c - \omega^2) = 0 \implies c = \frac{\omega^2}{2 g} .$$

EXEMPLO 7: Considere o sistema de polia dupla mostrado na Figura (4.8). Use as coordenadas indicadas e determine a Equação de Movimento.

Resolução:

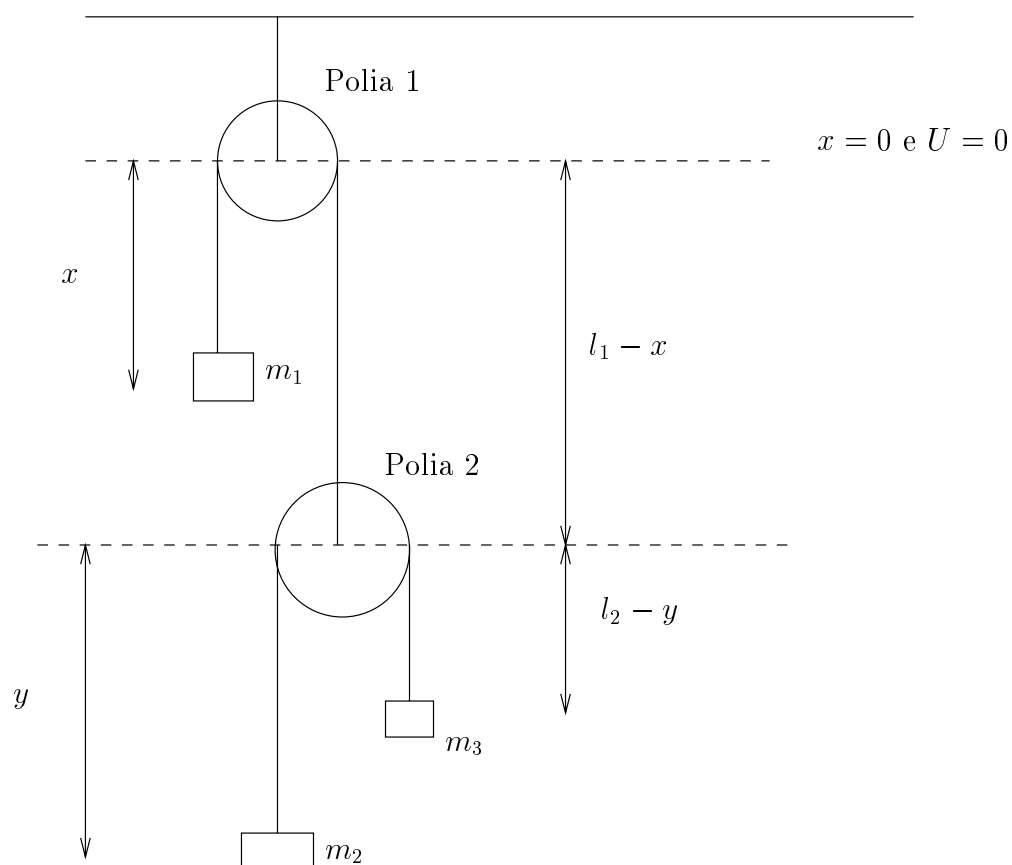


Figura 4.8: Exemplo7.

$$\begin{cases} x_1 = -x \\ x_2 = -(l_1 - x) - y \\ x_3 = -(l_1 - x) - (l_2 - y) \end{cases}$$

Então,

$$\begin{cases} m_1 : v_1 = -\dot{x} \\ m_2 : v_2 = \frac{d}{dt} [-(l_1 - x + y)] = \dot{x} - \dot{y} \\ m_3 : v_3 = \frac{d}{dt} [-(l_1 - x + l_2 - y)] = \dot{x} + \dot{y} \end{cases}$$

Assim, as energias cinética e potencial são dadas por:

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x} - \dot{y})^2 + \frac{1}{2} m_3 (\dot{x} + \dot{y})^2 \\ U = -m_1 g x - m_2 g (l_1 - x + y) - m_3 g (l_1 - x + l_2 - y) \end{cases}$$

Então,

$$L = T - U = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2 \dot{x} \dot{y}) + \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2 \dot{x} \dot{y}) + m_1 g x + m_2 g (l_1 - x + y) + m_3 g (l_1 - x + l_2 - y).$$

Para a variável x , temos que,

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = m_1 g - m_2 g - m_3 g = g(m_1 - m_2 - m_3) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m_1 \dot{x} + m_2 \dot{x} - m_2 \dot{y} + m_3 \dot{x} + m_3 \dot{y} \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{x} + (m_3 - m_2) \ddot{y} \end{cases}$$

Usando as Equações de Lagrange, obtemos,

$$m_1 \ddot{x} + m_2 (\ddot{x} - \ddot{y}) + m_3 (\ddot{x} + \ddot{y}) = (m_1 - m_2 - m_3) g.$$

Para a variável y , temos que,

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial y} = m_2 g - m_3 g = g(m_2 - m_3) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m_2 \dot{y} - m_2 \dot{x} + m_3 \dot{y} + m_3 \dot{x} \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m_2 (\ddot{y} - \ddot{x}) + m_3 (\ddot{x} + \ddot{y}) \end{cases}$$

e, de maneira análoga, usando as Equações de Lagrange, obtemos,

$$-m_2 (\ddot{x} - \ddot{y}) + m_3 (\ddot{x} + \ddot{y}) = (m_2 - m_3) g.$$

Portanto, o sistema de Equações Diferenciais que representam o movimento é dado por,

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x} + m_2 (\ddot{x} - \ddot{y}) + m_3 (\ddot{x} + \ddot{y}) = (m_1 - m_2 - m_3) g \\ -m_2 (\ddot{x} - \ddot{y}) + m_3 (\ddot{x} + \ddot{y}) = (m_2 - m_3) g \end{cases}$$

cujas soluções, são:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{(m_1 m_2 + m_1 m_3 - 2 m_2 m_3 - 2 m_3^2)}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4 m_2 m_3} g \\ \ddot{y} = \frac{(m_2^2 + m_1 m_3 + m_2 m_3)}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4 m_2 m_3} g \end{cases}$$

4.4 Equações de Lagrange com Multiplicadores de Lagrange

Se as relações de vínculo para um problema são dadas na forma diferencial ao invés de expressões algébricas, podemos incorporá-las diretamente nas Equações de Lagrange usando os Multiplicadores de Lagrange, isto é, para vínculos expressos como,

$$\sum \frac{\partial g_j}{\partial y_i} dy_i = 0; \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

ou,

$$\sum \frac{\partial f_k}{\partial q_j} dq_j = 0; \quad j = 1, 2, \dots, s; \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

As Equações de Lagrange são,

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_k \lambda_k(t) \frac{\partial f_k}{\partial q_j} = 0,$$

onde as Forças de Vínculo Generalizadas, Q_j , são dadas por,

$$Q_j = \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_j}.$$

EXEMPLO 8: Consideremos o caso do disco rolando plano inclinado a abaixo. Encontre as Equações de Movimento, a Força de Vínculo e a aceleração angular.

Resolução: As energias cinética e potencial do sistema são dadas por,

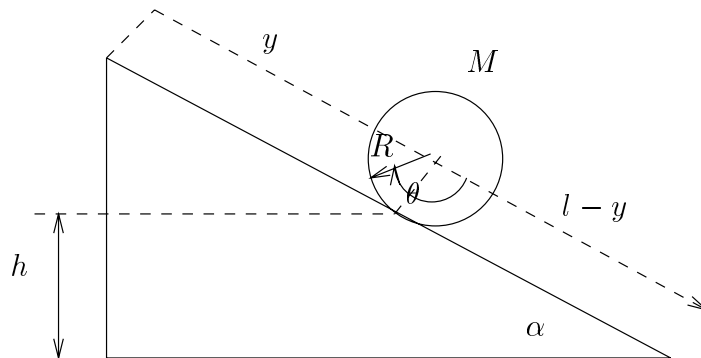


Figura 4.9: Exemplo 8.

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \\ U = M g h \end{cases}$$

Como o Momento de Inércia do disco é dado por $I = \frac{1}{2} M R^2$, $h = (l - y) \sin \alpha$ e $L = T - U$, então,

$$L = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{4} M R^2 \dot{\theta}^2 - M g (l - y) \sin \alpha.$$

A Equação de Vínculo é:

$$f(y, \theta) = y - R\theta = 0$$

Logo, usando as Equações de Lagrange, isto é,

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

encontramos,

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial y} = M g \sin \alpha \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = M \dot{y} \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = M \ddot{y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 1 \end{cases}$$

e assim, usando as equações de Lagrange, obtemos,

$$M g \sin \alpha - M \ddot{y} + \lambda = 0 .$$

De maneira análoga, encontramos,

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2} M R^2 \dot{\theta} \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2} M R^2 \ddot{\theta} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} = -R \end{cases}$$

e então,

$$\frac{1}{2} M R \ddot{\theta} + \lambda = 0 .$$

Portanto, temos o seguinte sistema de Equações Diferenciais,

$$\begin{cases} M g \sin \alpha - M \ddot{y} + \lambda = 0 \\ \frac{1}{2} M R \ddot{\theta} + \lambda = 0 \\ y = R\theta \implies \ddot{\theta} = \frac{\ddot{y}}{R} \end{cases}$$

cuja solução nos fornece,

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{y} = \frac{2}{3} g \sin \alpha \\ \ddot{\theta} = \frac{2}{3} \frac{g \sin \alpha}{R} \\ \lambda = -\frac{1}{3} M g \sin \alpha \end{array} \right.$$

OBS: Se o disco escorregasse sem atrito plano abaixo, teríamos, $\ddot{y} = g \sin \alpha$. Portanto, o rolamento vinculado reduz a aceleração à $\frac{2}{3}$ do valor do escorregamento sem atrito.

As forças de Vínculo Generalizadas são,

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \implies Q_y = \lambda = -\frac{1}{3} M g \sin \alpha \\ Q_\theta = \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} \implies Q_\theta = -\lambda R = \frac{1}{3} M g R \sin \alpha \end{array} \right.$$

Observe que Q_y e Q_θ são uma força e um torque, respectivamente, e elas são as Forças de Vínculo Generalizadas requeridas para manter o disco rolando plano abaixo sem escorregar.

Note que podemos eliminar $\dot{\theta}$ da Lagrangeana, substituindo $\dot{\theta} = \frac{\dot{y}}{R}$ da Equação de Vínculo. Então,

$$L = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{4} M R^2 \dot{\theta}^2 - M g (l - y) \sin \alpha = \frac{3}{4} M \dot{y}^2 - M g (l - y) \sin \alpha .$$

A Lagrangeana é expressa em termos de uma coordenada própria e assim, temos apenas uma equação do Movimento, isto é,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = M g \sin \alpha \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{3}{2} M \dot{y} \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{3}{2} M \ddot{y} \end{array} \right.$$

e assim,

$$M g \sin \alpha - \frac{3}{2} M \ddot{y} = 0 \implies \ddot{y} = \frac{2}{3} g \sin \alpha ,$$

que é o mesmo resultado encontrado anteriormente. Embora este procedimento seja mais simples, tem uma desvantagem. Com ele, não podemos obter a Força de Vínculo.

EXEMPLO 9: Uma partícula de massa m parte do repouso do topo de um hemisfério liso de raio a . Encontre a Força de Vínculo e determine o ângulo para o qual a partícula abandona o hemisfério.

Resolução: Sejam as Coordenadas Generalizadas: r e θ . A equação de Vínculo é:

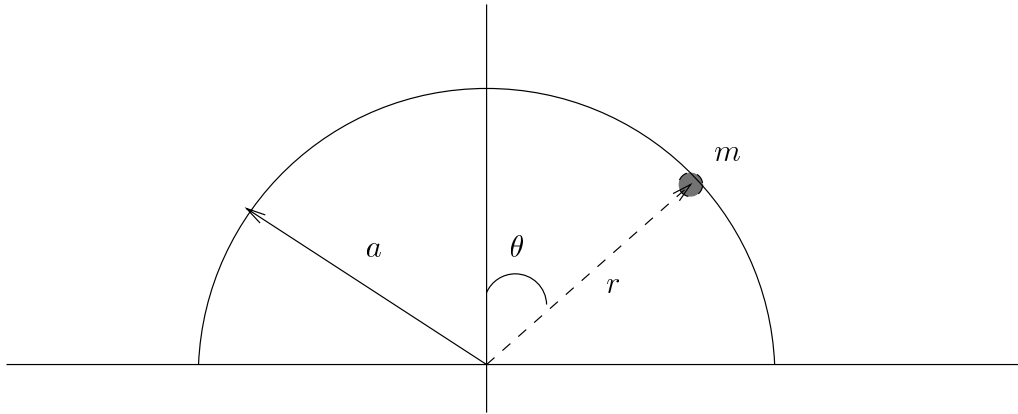


Figura 4.10: Exemplo 9.

$$f(r, \theta) = r - a = 0$$

Como

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \implies \dot{x} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \\ y = r \cos \theta \implies \dot{y} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \end{cases}$$

Então,

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \implies v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$$

e as Energias Cinética e Potencial e a Lagrangeana podem ser escritas como,

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 \\ U = m g r \cos \theta \\ L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - m g r \cos \theta \end{cases}$$

Logo, para a coordenada r , temos,

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot{\theta}^2 - m g \cos \theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \ddot{r} \\ \frac{\partial f}{\partial r} = 1 \end{cases}$$

e assim,

$$m r \dot{\theta}^2 - m g \cos \theta - m \ddot{r} + \lambda = 0 .$$

Para a coordenada θ , temos,

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \theta} = m g r \sin \theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \ddot{\theta} + 2 m r \dot{r} \dot{\theta} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

e portanto,

$$\ddot{\theta} + 2 \frac{\dot{r}}{r} \dot{\theta} - \frac{g}{r} \sin \theta = 0 .$$

Como $r = a$ então, $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. Temos então,

$$\begin{cases} m a \dot{\theta}^2 - m g \cos \theta + \lambda = 0 \\ \ddot{\theta} - \frac{g}{a} \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

Da segunda equação do sistema (4.6), obtemos,

$$\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{g}{a} \sin \theta \implies \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \overbrace{\frac{d\theta}{dt}}^{\dot{\theta}} = \frac{g}{a} \sin \theta \implies \dot{\theta} d\dot{\theta} = \frac{g}{a} \sin \theta d\theta ,$$

que, integrando fornece a equação,

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = -\frac{g}{a} \cos \theta + c .$$

Mas, para $t = 0$, $\theta = \dot{\theta} = 0$. Portanto, $c = \frac{g}{a}$. Assim,

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{a} (1 - \cos \theta) .$$

Substituindo esta última equação na primeira equação do Sistema (4.6), encontramos,

$$\lambda = m g (3 \cos \theta - 2) ,$$

que é a Força de Vínculo.

A partícula sai do hemisfério quando $\lambda = 0$, isto é,

$$\theta_o = \arccos \left(\frac{2}{3} \right).$$

4.5 Equivalência das Equações de Lagrange e de Newton

As formulações de Lagrange e de Newton são equivalentes: o ponto de vista é diferente mas o conteúdo é o mesmo.

Em coordenadas retangulares, as Equações de Lagrange para uma única partícula é dada por,

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 ; i = 1, 2, 3 .$$

Mas, $L = T - U$. Logo,

$$\frac{\partial(T - U)}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial(T - U)}{\partial \dot{x}_i} = 0 .$$

Porém, em coordenadas retangulares e para um sistema conservativo, temos que a energia cinética é função apenas da velocidade e a energia potencial é função apenas das coordenadas, isto é,

$$\left\{ \begin{array}{l} T = T(\dot{x}_i) \implies \frac{\partial T}{\partial x_i} = 0 \\ U = U(x_i) \implies \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} = 0 \end{array} \right.$$

Assim,

$$\frac{\overbrace{\partial T}^{=0}}{\partial x_i} - \frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \overbrace{\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i}}^{=0} \right) = 0 \implies -\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = 0 .$$

Também, para um sistema conservativo,

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} ,$$

e,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} m \dot{x}_j^2 \right) = \frac{d}{dt} \overbrace{(m \dot{x}_i)}^{p_i} \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \dot{p}_i .$$

Assim,

$$F_i - \dot{p}_i = 0 \implies F_i = \dot{p}_i ,$$

que é a Equação de Newton.

Portanto, as Equações de Lagrange e Newton são idênticas se as Coordenadas Generalizadas são as coordenadas retangulares.

Agora vamos deduzir as Equações de Lagrange do Movimento usando conceitos Newtonianos.

Considere uma partícula, por simplicidade. Precisamos transformar as coordenadas x_i para as coordenadas q_j .

Temos que, $x_i = x_i(q_j, t)$ então,

$$\dot{x}_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t}.$$

Como,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i / \partial t}{\partial q_j / \partial t} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \\ \dot{p}_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \implies p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \end{array} \right. \quad (4.7)$$

onde, p_j é o Momento Generalizado associado com q_j .

Podemos determinar uma Força Generalizada, considerando o trabalho virtual δW feito por um caminho δx_i , isto é,

$$\delta W = \sum_i F_i \delta x_i = \sum_{ij} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j,$$

de modo que a Força Generalizada Q_j associada com q_j é,

$$Q_j = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}.$$

Como trabalho virtual é sempre energia, o produto $Q q$ também o é. Assim, se q é o comprimento, Q é a força; se q é um ângulo, Q é um torque.

Para um sistema conservativo, Q_j é derivável de uma energia potencial, isto é,

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j}$$

Da segunda equação do sistema (4.7), temos que,

$$p_j = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left[\sum_i \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 \right] = \sum_i m \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \implies p_j = \sum_i m \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}.$$

Assim,

$$\dot{p}_j = \sum_i \left(m \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + m \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right),$$

mas,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \sum_k \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial t},$$

então,

$$\dot{p}_j = \underbrace{\sum_i m \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}}_{=Q_j} + \underbrace{\sum_{ik} m \dot{x}_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \sum_i m \dot{x}_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial t}}_{=\frac{\partial T}{\partial q_j}},$$

pois, como

$$\begin{cases} T = \sum_i \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 \\ \dot{x}_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \end{cases}$$

Então,

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_i m \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} = \sum_i m \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial q_j} \left[\sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right] = \sum_{ik} m \dot{x}_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \sum_i m \dot{x}_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial t}.$$

Portanto, podemos escrever,

$$\dot{p}_j = Q_j + \frac{\partial T}{\partial q_j}.$$

Mas, $p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$ e $Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j}$, então,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j},$$

e, como,

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = 0,$$

então,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \frac{\partial (T - U)}{\partial q_j} \implies \frac{\partial (T - U)}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T - U) = 0 \implies \\ &\implies \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

que são as Equações de Lagrange.

Historicamente, as Equações de Lagrange do Movimento, expressas em Coordenadas Generalizadas foram deduzidas antes do princípio de Hamilton. Deduzimos as Equações de

Lagrange postulando o Princípio de Hamilton porque este método é mais direto e é também formal para unificar a Dinâmica Clássica.

Devemos reafirmar que a Dinâmica Lagrangeana não constitui uma nova teoria no sentido da palavra. Os resultados das análises Lagrangeana ou Newtoniana devem ser as mesmas para qualquer sistema mecânico. A única diferença está no método usado para obter estes resultados. Enquanto a aproximação de Newton enfatiza uma AÇÃO EXTERNA atuando sobre um corpo (A FORÇA), o método de Lagrange trata apenas com quantidades associadas com o corpo (AS ENERGIAS CINÉTICA E POTENCIAL), e essa é uma propriedade particularmente importante porque a energia é uma quantidade escalar, e portanto, a Função Lagrangeana para um sistema é INVARIANTE às transformações de coordenadas. Assim, é possível passar do espaço ordinário (no qual a Equação de Movimento pode ser bastante complicada) para um espaço de configuração que pode ser escolhido para fornecer o máximo de simplificação para um problema particular.

Estamos acostumados a pensar em sistemas mecânicos em termos de quantidades Vetoriais, tais como, Força, Velocidade, Momentum Angular e Torque. Mas, na formulação Lagrangeana, as Equações de Movimento são obtidas inteiramente em termos de operações Escalares no espaço das configurações.

Outro aspecto importante do ponto de vista FORÇA X ENERGIA é que em certas situações nem sempre pode ser possível declarar explicitamente todas as forças atuando sobre o corpo (como é o caso, algumas vezes, para forças de Vínculo). Ao passo que é ainda possível dar expressões para as energias cinética e potencial. É exatamente este fato que torna útil o Princípio de Hamilton para sistemas Quantum-Mecânicos, onde normalmente conhecemos as energias mas não as forças.

4.6 Um Teorema sobre a Energia Cinética

Se a Energia Cinética é expressa em coordenadas retangulares fixa, o resultado é uma função homogênea quadrática de $\dot{x}_{\alpha,i}$, ou seja,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i=1}^3 m_{\alpha} \dot{x}_{\alpha,i}^2.$$

Para muitas partículas,

$$x_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}(q_j, t) \quad j = 1, 2, \dots, s,$$

assim,

$$\dot{x}_{\alpha,i} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \implies \dot{x}_{\alpha,i}^2 = \sum_{jk} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + 2 \sum_j \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \dot{q}_j + \left(\frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \right)^2,$$

e então, a Energia Cinética é,

$$T = \sum_{\alpha} \sum_{ijk} \frac{1}{2} m_{\alpha} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{\alpha} \sum_{ij} m_{\alpha} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \dot{q}_j + \sum_{\alpha} \sum_i \frac{1}{2} m_{\alpha} \left(\frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \right)^2,$$

ou seja,

$$T = \sum_{jk} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_j b_j \dot{q}_j + c ,$$

onde,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{jk} = \sum_{\alpha,i,j} \frac{1}{2} m_{\alpha} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_k} \\ b_j = \sum_{\alpha,i} m_{\alpha,i} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \\ c = \sum_{\alpha,i} \frac{1}{2} m_{\alpha} \left(\frac{\partial X_{\alpha,i}}{\partial t} \right)^2 \end{array} \right.$$

Um caso particularmente importante ocorre quando o sistema é ESCLERONÔMICO, isto é, o tempo não aparece explicitamente nas Equações de Transformações. Então,

$$\frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} = 0 \implies b_j = c = 0 .$$

Portanto, sob estas condições, a Energia Cinética é uma Função Homogênea Quadrática das Velocidades Generalizadas, isto é,

$$T = \sum_{jk} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k .$$

Então,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_k a_{lk} \dot{q}_k + \sum_j a_{jl} \dot{q}_j \implies \dot{q}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_k a_{lk} \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_j a_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l .$$

Somando em l , temos,

$$\sum_l \dot{q}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{kl} a_{lk} \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{jl} a_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l = 2 \overbrace{\sum_{jk} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k}^{=T} \implies \sum_l \dot{q}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = 2T .$$

Este resultado importante é um caso especial do Teorema de Euler, que diz que:

Se $f(y_k)$ é uma função homogênea de y_k e é de grau n , então,

$$\sum_k y_k \frac{\partial f}{\partial y_k} = n f$$

4.7 Os Teoremas da Conservação

A - Conservação da Energia:

O tempo é homogêneo num sistema referencial inercial. Portanto, a Lagrangeana que descreve um sistema fechado, isto é, um sistema não interagente com nenhum objeto fora do sistema, não pode depender explicitamente do tempo, ou seja,

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 .$$

Mas, $L = L(q_j, \dot{q}_j; t)$. Logo,

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \overbrace{\frac{\partial L}{\partial t}}^{=0} \implies \frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j.$$

Como, pela Equação de Lagrange, $\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$, então,

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \dot{q}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_j \ddot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \implies \frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0 \implies \frac{d}{dt} \left(L - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0,$$

e assim,

$$L - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = cte = -H,$$

onde H é a Função Hamiltoniana do sistema.

Se a Energia Potencial U não depende explicitamente das velocidades, $\dot{x}_{\alpha,i}$, ou do tempo, t , então podemos escrever, $U = U(x_{\alpha,i})$ e assim, $U = U(q_j)$ e $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = 0$.

E, como $T = T(\dot{q}_j)$, então, $\frac{\partial T}{\partial q_j} = 0$. Temos que,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial(T - U)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}.$$

Então,

$$T - U - \overbrace{\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}}{=2T} = -H \implies T + U = E = H = cte$$

A Energia Total E é uma Constante do Movimento para este caso. A Função H , Hamiltoniana do Sistema, pode ser definida como,

$$H = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L. \quad (4.9)$$

É importante notar que a Hamiltoniana, H , é igual à Energia Total, E , só se as seguintes condições são satisfeitas:

i) As Equações de Transformações conectando as Coordenadas Retangulares e Generalizadas, isto é, $x_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}(q_j, t)$, com $j = 1, 2, \dots, s$ devem ser independentes do tempo, assim assegurando que a Energia Cinética é uma Função Homogênea Quadrática de \dot{q}_j ;

ii) A Energia Potencial deve ser independente da velocidade, assim permitindo a eliminação dos termos $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}$ da Equação (4.9).

B - Conservação do Momento Linear:

Como o espaço é homogêneo em um sistema de referencial inercial, a Lagrangeana de um sistema fechado não será afetada por uma translação do sistema inteiro no espaço, ou seja, $\delta L = 0$.

Considere uma translação infinitesimal de raio vetor $\vec{r}_\alpha \rightarrow \vec{r}_\alpha + \delta \vec{r}$; esta quantidade translada o sistema inteiro por $\delta \vec{r}$. Por simplicidade, vamos examinar um sistema consistindo de apenas uma partícula, e vamos escrever a Lagrangeana em termos das Coordenadas Retangulares, isto é, $L = L(x_i, \dot{x}_i)$.

A variação em L causada por um deslocamento infinitesimal $\delta \vec{r} = \sum_i \delta x_i \hat{e}_i$ é dada por,

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i = 0.$$

Consideremos apenas um deslocamento variado, de modo que δx_i não sejam funções explícitas ou implícitas do tempo. Assim,

$$\delta \dot{x}_i = \delta \frac{dx_i}{dt} = \frac{d}{dt} \delta x_i = 0.$$

Logo,

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i = 0 \implies \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0.$$

Como, de acordo com as Equações de Lagrange,

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \implies \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = cte,$$

assim,

$$\frac{\partial(T - U)}{\partial \dot{x}_i} = cte \implies \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \overbrace{\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i}}^{=0} = cte \implies \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = cte,$$

e, portanto,

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left(\frac{1}{2} m \sum_i \dot{x}_i^2 \right) = cte \implies m \dot{x}_i = p_i = cte.$$

Assim, a homogeneidade do espaço implica que o MOMENTO LINEAR \vec{p} de um sistema fechado é constante no tempo.

Este resultado pode também ser interpretado de acordo com a seguinte afirmação:

Se a Lagrangeana de um sistema (não necessariamente fechado) é invariante com respeito à translação em uma certa direção, então o MOMENTO LINEAR do sistema nesta direção é constante no tempo.

C - Conservação do Momento Angular:

Uma característica de um referencial inercial é que o espaço é Isotrópico - isto é, que as propriedades mecânicas de um sistema fechado não são afetadas pela orientação do sistema. Em particular, a Lagrangeana de um sistema fechado não varia se o sistema é girado por um ângulo infinitesimal, isto é, $\delta L = 0$.

Se um sistema é girado em torno de um certo eixo por um ângulo infinitesimal $\delta\theta$, o raio vetor \vec{r} para um dado ponto varia para $\vec{r} + \delta\vec{r}$, onde,

$$\delta\vec{r} = \delta\theta \times \vec{r} \implies \delta\dot{\vec{r}} = \delta\dot{\theta} \times \vec{r},$$

como mostra a Figura (4.11). Considerando apenas uma única partícula e expressando a La-

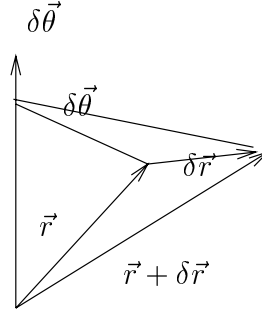


Figura 4.11: Sistema girado em torno de um certo eixo por um ângulo infinitesimal.

grangeana em Coordenadas Retangulares, a variação em L causada pela rotação infinitesimal é,

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i = 0.$$

Mas, $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$. Logo, usando a Equação de Lagrange, temos,

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \implies \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} p_i = 0 \implies \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial x_i}.$$

Logo,

$$\delta L = \sum_i \dot{p}_i \delta x_i + \sum_i p_i \delta \dot{x}_i = 0 \implies \vec{p} \cdot \delta\vec{r} + \vec{p} \cdot \delta\dot{\vec{r}} = 0 \implies \vec{p} \cdot (\delta\theta \times \vec{r}) + \vec{p} \cdot (\delta\dot{\theta} \times \vec{r}) = 0.$$

Considerando a igualdade vetorial,

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}),$$

temos que,

$$\vec{p} \cdot (\delta\theta \times \vec{r}) = \delta\dot{\theta} \cdot (\vec{r} \times \vec{p})$$

e,

$$\vec{p} \cdot (\delta\dot{\theta} \times \vec{r}) = \delta\theta \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{p}}).$$

Logo,

$$\delta\dot{\theta} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) + \delta\theta \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{p}}) = 0 \implies \delta\dot{\theta} \cdot \overbrace{[(\vec{r} \times \vec{p}) + (\vec{r} \times \dot{\vec{p}})]}^{\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p})} = 0 \implies \delta\dot{\theta} \cdot \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = 0.$$

Como $\delta\vec{\theta}$ é arbitrário,

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = 0 \implies \vec{r} \times \vec{p} = cte.$$

Mas, $\vec{r} \times \vec{p} = \vec{L}$, onde \vec{L} é o Momento Angular. Assim, o Momento Angular de uma partícula em um sistema fechado é, portanto, constante no tempo.

Um importante corolário deste teorema é o seguinte: Considere um sistema em um campo de força externo. Se o campo possui um eixo de simetria então a Lagrangeana do sistema é invariante com relação à rotação em torno do eixo de simetria. Portanto, o Momento Angular do sistema em torno do eixo de simetria é constante no tempo.

Existem então, sete constantes (ou integrais) do movimento para um sistema fechado: a Energia Total, o Momento Linear (três componentes) e o Momento Angular (três componentes).

4.8 Equações Canônicas do Movimento - Dinâmica de Hamilton

Se a Energia Potencial de um sistema é independente da velocidade, então as componentes do Momento Linear em coordenadas retangulares são dadas por $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$.

Por analogia, estendemos este resultado para o caso no qual a Lagrangeana é expressa em Coordenadas Generalizadas e definimos o Momento Generalizado como,

$$p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad \text{e} \quad \dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j} \quad (4.10)$$

Logo, a equação para o Hamiltoniano pode ser escrita como,

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L$$

A Lagrangeana é considerada uma função das Coordenadas Generalizadas e, possivelmente do tempo. A dependência de L com o tempo pode surgir se os Vínculos são dependentes do tempo ou se as Equações de Transformações conectando as Coordenadas Retangulares e Generalizadas contém explicitamente o tempo (não consideramos potenciais dependentes do tempo).

Podemos resolver a Equação (4.10) para as Velocidades Generalizadas e expressá-las como,

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(q_k, p_k, t)$$

Assim,

$$H(q_k, p_k, t) = \sum_j p_j \dot{q}_j - L(q_k, \dot{q}_k, t) \quad (4.11)$$

A Equação (4.11) é escrita de modo que enfatiza o fato que o Hamiltoniano é sempre considerado como uma função de (q_k, p_k, t) , enquanto que a Lagrangeana é uma função de (q_k, \dot{q}_k, t) , ou seja,

$$H = H(q_k, p_k, t) \quad \text{e} \quad L = L(q_k, \dot{q}_k, t)$$

A diferencial total de H é portanto,

$$dH = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \quad (4.12)$$

Mas, pela Equação (4.11),

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial q_k} = \sum_k p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \\ \frac{\partial H}{\partial p_k} = \sum_k \dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\dot{q}_k}{dp_k} \\ \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} dH &= \sum_k \left(p_k \frac{d\dot{q}_k}{dq_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) dq_k + \left(\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\dot{q}_k}{dp_k} \right) dp_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ dH &= \sum_k p_k d\dot{q}_k + \dot{q}_k dp_k - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_k}}_{=\dot{p}_k} dq_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned}$$

Pela Equação (4.10),

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = p_j \quad \text{e} \quad \frac{\partial L}{\partial q_j} = \dot{p}_j.$$

Portanto,

$$dH = \sum_j (\dot{q}_j dp_j - \dot{p}_j dq_j) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (4.13)$$

Comparando as Equações (4.12) e (4.13), temos,

$$\begin{cases} \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \\ \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \end{cases} \quad (4.14)$$

As duas primeiras Equações do sistema (4.14) são as Equações de Hamilton do Movimento. Por causa de sua aparência simétrica, elas também são conhecidas como as Equações Canônicas do Movimento. A descrição do movimento por este sistema de equações é chamada de Dinâmica Hamiltoniana.

Também,

$$dH = \sum_k -\dot{p}_k dq_k + \dot{q}_k dp_k + \frac{\partial H}{\partial t} dt \implies \frac{dH}{dt} = \sum_k \underbrace{\left(-\frac{dp_k}{dt} \frac{dq_k}{dt} + \frac{dq_k}{dt} \frac{dp_k}{dt} \right)}_{=0} + \frac{\partial H}{\partial t}$$

e assim,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (4.15)$$

A Equação (4.15) expressa o fato que se H não contém explicitamente o tempo, então o Hamiltoniano é uma quantidade conservada.

O Hamiltoniano é igual à Energia Total $U + T$ se a Energia Potencial é independente da velocidade e as Equações de Transformação entre $x_{\alpha,i}$ e q_j não contém, explicitamente, o tempo. Sob essas condições e, se $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, então $H = E = cte$.

Existem $2s$ Equações Canônicas e elas substituem as Equações de Lagrange. Dizemos que $s = 3n - m$ é o número de Graus de Liberdade do sistema. Mas, as Equações Canônicas são Equações Diferenciais de primeira ordem, enquanto as Equações de Lagrange são de segunda ordem.

Para usar as Equações Canônicas na resolução de problemas, devemos primeiro construir o Hamiltoniano como uma função das Coordenadas Generalizadas e dos Momentos Generalizados. Pode ser possível em muitos exemplos fazer isso diretamente. Em casos mais complicados, pode ser necessário primeiro usar a Lagrangeana e então calcular o Momento Generalizado pela Equação (4.10). As Equações do Movimento são então dadas pelas Equações Canônicas.

EXEMPLO 10: Use o Método de Hamilton para encontrar as Equações de Movimento de uma partícula de massa m obrigada a mover-se sobre a superfície de um cilindro definido por $x^2 + y^2 = R^2$. A partícula está sujeita a uma força dirigida para a origem e proporcional à distância da partícula à origem ($F = -kr$).

Resolução: Temos que,

$$U = \frac{1}{2} k r^2 = \frac{1}{2} k \overbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}^{R^2} \implies U = \frac{1}{2} k (R^2 + z^2),$$

e,

$$v^2 = \overbrace{\dot{R}^2}^{=0} + R^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 \implies T = \frac{1}{2} m (R^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2),$$

assim,

$$L = T - U = \frac{1}{2} m (R^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2} k (R^2 + z^2).$$

As Coordenadas Generalizadas são θ e z , e os Momentos Generalizados são,

$$\begin{cases} p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \implies p_\theta = m R^2 \dot{\theta} \longrightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{p_\theta^2}{m^2 R^4} \\ p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \longrightarrow p_z = m \dot{z} \longrightarrow \dot{z}^2 = \frac{p_z^2}{m^2} \end{cases}$$

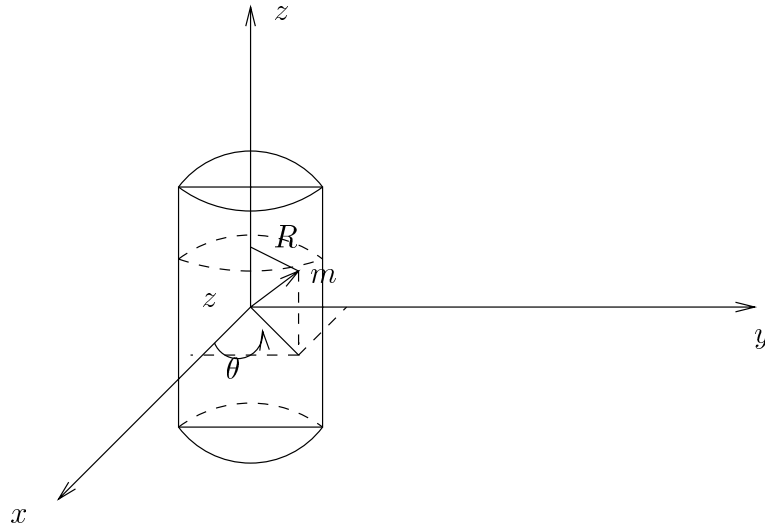


Figura 4.12: Exemplo 1.

Como o sistema é conservativo e as Equações de Transformação entre Coordenadas Retangulares e Cilíndricas não envolvem explicitamente o tempo, o Hamiltoniano é exatamente a Energia Total E expressa em termos das variáveis θ , p_θ , z e p_z , isto é,

$$H = T + U = \frac{1}{2} m (R^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} k (R^2 + z^2) = \frac{p_\theta^2}{2 m R^2} + \frac{p_z^2}{2 m} + \frac{1}{2} k (R^2 + z^2).$$

As Equações Canônicas são,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} \implies \dot{p}_\theta = 0 \\ \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} \implies \dot{p}_z = -k z \\ \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} \implies \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m R^2} \\ \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} \implies \dot{z} = \frac{p_z}{m} \end{array} \right.$$

Mas,

$$p_\theta = m R^2 \dot{\theta} \implies \dot{p}_\theta = m R^2 \ddot{\theta} = 0 \implies m R^2 \ddot{\theta} = 0 \implies p_\theta = m R^2 \dot{\theta} = cte.$$

Assim, o Momento Angular em torno do eixo z é uma Constante do Movimento. Este resultado é conhecido, porque o eixo z é o eixo de simetria do problema.

Também,

$$p_z = m \dot{z} \implies \dot{p}_z = m \ddot{z},$$

e,

$$\dot{p}_z = -k z.$$

Então,

$$m\ddot{z} = -kz \longrightarrow \ddot{z} + \frac{k}{m}z = 0 \longrightarrow \ddot{z} + \omega_o^2 z = 0 ; \omega_o^2 = \frac{k}{m} .$$

Portanto o movimento na direção z é Harmônico Simples de frequência angular $\omega_o = \sqrt{k/m}$.

As Equações do Movimento para o Exemplo 10 podem também serem encontradas pelo Método de Lagrange. Neste caso, as Equações de Lagrange do Movimento são mais fáceis de obter do que as Equações Canônicas. De fato, é quase sempre verdade que o Método de Lagrange leve mais diretamente às Equações do Movimento que o Método de Hamilton. Mas, porque temos maior liberdade em escolher as variáveis na formulação de Hamilton (o q_k e o p_k são independentes, enquanto o q_k e o \dot{q}_k não são), frequentemente ganhamos uma certa vantagem usando o Método de Hamilton. A Coordenada Generalizada q_k e o Momento Generalizado p_k são quantidades Canonicamente Conjugadas. De acordo com as Equações (4.14), se q_k não aparece no Hamiltoniano, então $\dot{p}_k = 0$, e o Momento Conjugado p_k é uma Constante do Movimento. Coordenadas que não aparecem explicitamente nas expressões para T e U são ditas serem Cíclicas. Uma Coordenada Cíclica em H é também Cíclica em L . Mas, mesmo que a Coordenada Generalizada q_k não apareça em L , a Velocidade Generalizada \dot{q}_k relacionada a esta Coordenada, em geral, está ainda presente. Assim,

$$L = L(q_1, \dots, q_{k-1}, q_k, q_{k+1}, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) ,$$

e não leva a nenhuma redução no número do Grau de Liberdade do sistema mesmo quando uma Coordenada é Cíclica; existem ainda s Equações de segunda ordem a serem resolvidas. Contudo, na formulação Canônica, se q_k é Cíclica, p_k é constante, isto é, $p_k = \alpha_k$ e,

$$H = L(q_1, \dots, q_{k-1}, q_k, q_{k+1}, \dots, q_s, p_1, \dots, p_{k-1}, \alpha_k, p_{k+1}, \dots, p_s, t) .$$

Assim, existem $2s - 2$ Equações de primeira ordem a serem resolvidas e o problema tem, de fato, sido reduzido em complexidade; existem de fato só $s - 1$ Graus de Liberdade remanescentes. A Coordenada q_k está completamente separada. Calculamos a constante α_k aplicando as condições iniciais, e a Equação do Movimento.

Para a Coordenada Cíclica,

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial \alpha_k} \equiv \omega_k ,$$

que pode ser imediatamente integrada, fornecendo,

$$q_k(t) = \int \omega_k dt .$$

A solução para uma Coordenada Cíclica é, portanto, trivial e, conseqüentemente, a formulação Canônica de Hamilton é particularmente mais conveniente para tratar com problemas em que uma ou mais Coordenadas são Cíclicas.

EXEMPLO 11: Usando o Método do Hamiltoniano, encontre as Equações de Movimento para uma Pêndulo Esférico de massa m e comprimento b .

Resolução: As Coordenadas Generalizadas são θ e ϕ , assim,

$$x = b \sin \theta \implies \dot{x} = b \dot{\theta} \cos \theta$$

e,

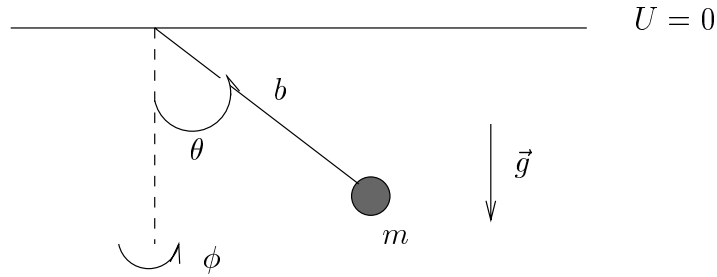


Figura 4.13: Exemplo 2.

$$y = -b \cos \theta \implies \dot{y} = b \dot{\theta} \sin \theta.$$

Então,

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = b^2 \dot{\theta}^2.$$

Como,

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\phi}^2,$$

onde $I = m r^2 = m b^2 \sin^2 \theta$ é o Momento de Inércia da partícula de massa m em relação ao eixo vertical y e $\dot{\phi}$ é a velocidade angular da partícula ao redor desse eixo.

Assim,

$$T = \frac{1}{2} m (b^2 \dot{\theta}^2 + b^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2).$$

A Energia Potencial do sistema é dada por,

$$U = m g y \implies U = -m g b \cos \theta.$$

Logo,

$$L = \frac{1}{2} m (b^2 \dot{\theta}^2 + b^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + m g b \cos \theta.$$

Os Momentos Generalizados são,

$$\begin{cases} p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m b^2 \dot{\theta} \implies \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m b^2} \\ p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m b^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} \implies \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{m b^2 \sin^2 \theta} \end{cases}$$

Temos que,

$$H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L = p_\theta \dot{\theta} + p_\phi \dot{\phi} - L \implies H = \frac{1}{2} m b^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m b^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 - m g b \cos \theta.$$

Escrevendo H em função de p_θ e p_ϕ , temos,

$$H = \frac{p_\theta^2}{2 m b^2} + \frac{p_\phi^2}{2 m b^2 \sin^2 \theta} - m g b \cos \theta.$$

As Equações do Movimento são,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} \implies \dot{p}_\theta = \frac{p_\phi^2 \cos \theta}{m b^2 \sin^3 \theta} - m g b \sin \theta \\ \dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \\ \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} \implies \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m b^2} \\ \dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} \implies \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{m b^2 \sin^2 \theta} \end{array} \right.$$

OBS: Como ϕ não aparece nas expressões de T e U , ela é uma Coordenada Cíclica e assim, o Momento p_ϕ em torno do eixo de simetria é constante.

4.9 Problemas Resolvidos

01) Uma esfera de raio ρ é obrigada a rolar, sem escorregar, sobre a metade mais baixa da superfície interna de um cilindro oco de raio interno R . Determine a Função Lagrangeana, a Equação de Vínculo, e as Equações de Lagrange do Movimento. Encontre a frequência das pequenas oscilações.

Resolução:

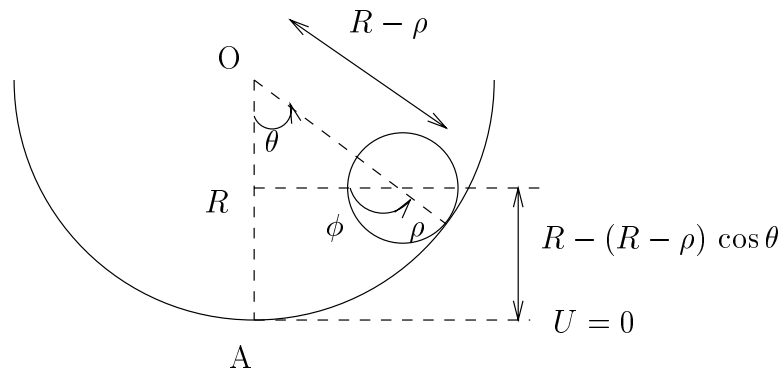


Figura 4.14: Exercício 1.

$$\left\{ \begin{array}{l} T = \frac{1}{2} m [(R - \rho) \dot{\theta}]^2 + \frac{1}{2} I \dot{\phi}^2 \implies T = \frac{1}{2} m [(R - \rho) \dot{\theta}]^2 + \frac{1}{5} m \rho^2 \dot{\phi}^2 \\ U = m g [R - (R - \rho) \cos \theta] \end{array} \right.$$

Assim,

$$L = T - U = \frac{1}{2} m [(R - \rho) \dot{\theta}]^2 + \frac{1}{5} m \rho^2 \dot{\phi}^2 - m g [R - (R - \rho) \cos \theta].$$

Quando a esfera está em sua posição mais baixa, os pontos A e B coincidem. Assim, a condição de Vínculo é que os arcos AO e BO são iguais, isto é,

$$R\theta = \rho\phi \implies f(\theta, \phi) = R\theta - \rho\phi = 0.$$

Assim,

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \phi} = 0 \end{cases}$$

Para a coordenada θ ,

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \theta} = -m g (R - \rho) \sin \theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m (R - \rho)^2 \dot{\theta} \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m (R - \rho)^2 \ddot{\theta} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} = R \end{cases}$$

e, para a coordenada ϕ ,

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{2}{5} m \rho^2 \dot{\phi} \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{2}{5} m \rho^2 \ddot{\phi} \\ \frac{\partial f}{\partial \phi} = -\rho \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{cases} \lambda = -\frac{2}{5} m R \ddot{\theta} \\ \left[(R - \rho)^2 + \frac{2}{5} R^2 \right] \ddot{\theta} + g (R - \rho) \sin \theta = 0 \end{cases}$$

Se θ é pequeno tal que $\sin \theta \equiv \theta$, temos,

$$\left[(R - \rho)^2 + \frac{2}{5} R^2 \right] \ddot{\theta} + g (R - \rho) \theta = 0 \implies \ddot{\theta} + \frac{g (R - \rho)}{\left[(R - \rho)^2 + \frac{2}{5} R^2 \right]} \theta = 0,$$

e portanto,

$$\omega = \sqrt{\frac{g(R - \rho)}{\left[(R - \rho)^2 + \frac{2}{5}R^2\right]}}$$

02) Uma partícula move-se num plano sob a influência de uma força $f = -Ar^{\alpha-1}$ dirigida para a origem; A e α são constantes positivas. Escolha as Coordenadas generalizadas apropriadas e adote a Energia Potencial zero na origem. Encontre as Equações de Lagrange do Movimento. É o Momento Angular em torno da origem conservado? É a Energia Total conservada?

Resolução: As Coordenadas Generalizadas são: r e θ .

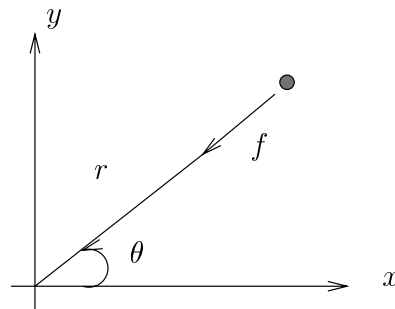


Figura 4.15: Exercício 2.

Temos,

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2}m(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2) \\ F = -\nabla U \implies U = \frac{A}{\alpha}r^\alpha \end{cases}$$

Assim,

$$L = T - U \implies L = \frac{1}{2}m(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2) - \frac{A}{\alpha}r^\alpha.$$

Para a coordenada r , temos,

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot{\theta}^2 - A r^{\alpha-1} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \ddot{r} \end{cases}$$

e, para a coordenada θ , temos,

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \end{cases}.$$

Obtemos assim as Equações,

$$\begin{cases} m r \dot{\theta}^2 - A r^{\alpha-1} - m \ddot{r} = 0 \\ m r^2 \dot{\theta} = l \end{cases}, \quad (4.16)$$

onde, l é o Momento Angular.

Assim, o Momento Angular é conservado e $\dot{\theta} = \frac{l}{m r^2}$.

Substituindo na primeira equação do Sistema (4.16), encontramos,

$$m \ddot{r} - \frac{l^2}{m r^3} + A r^{\alpha-1} = 0 \implies m \dot{r} \ddot{r} - \frac{l^2 \dot{r}}{m r^3} + A \dot{r} r^{\alpha-1} = 0,$$

então,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{l^2}{2 m r^2} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{A r^\alpha}{\alpha} \right) = 0 \implies \frac{d}{dt} \left[\overbrace{\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2 m r^2}}{=T} + \overbrace{\frac{A r^\alpha}{\alpha}}{=U} \right] = 0,$$

e assim,

$$\frac{\partial}{\partial t} (T + U) = 0 \implies \frac{\partial}{\partial t} E = 0 \implies E = cte,$$

ou seja, a Energia Total E se conserva.

03) Um aro de massa m e raio R rola, sem escorregar, para baixo num plano inclinado de massa M , que faz um ângulo α com a horizontal. Encontre as equações de Lagrange do movimento e as integrais do movimento se o plano pode deslizar sem atrito ao longo de uma superfície horizontal.

Resolução: As Coordenadas Generalizadas são: ψ , s ; Podemos escrever as Coordenadas

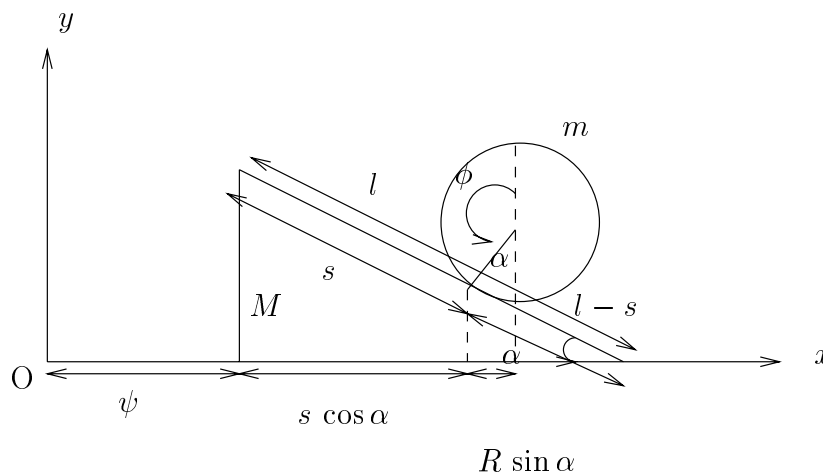


Figura 4.16: Exercício 3.

do centro do aro como,

$$\begin{cases} x = \psi + s \cos \alpha + R \sin \alpha \\ y = R \cos \alpha + (l - s) \sin \alpha \end{cases} \quad (4.17)$$

Temos que as Energias Cinética e Potencial são dadas por,

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} M \dot{\psi}^2 \\ U = m g y \end{cases} .$$

Mas, pelas Equações (4.17),

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{\psi} + \dot{s} \cos \alpha \\ \dot{y} = -\dot{s} \sin \alpha \end{cases} .$$

Como $s = R \phi \implies \dot{\phi} = \frac{\dot{s}}{R}$, então,

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} (m + M) \dot{\psi}^2 + m \dot{s}^2 + m \dot{\psi} \dot{s} \cos \alpha \\ U = m g [R \cos \alpha + (l - s) \sin \alpha] \end{cases} .$$

Logo,

$$L = \frac{1}{2} (m + M) \dot{\psi}^2 + m \dot{s}^2 + m \dot{\psi} \dot{s} \cos \alpha - m g [R \cos \alpha + (l - s) \sin \alpha] .$$

Para a coordenada ψ , temos,

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = (m + M) \dot{\psi} + m \dot{s} \cos \alpha \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = (m + M) \ddot{\psi} + m \ddot{s} \cos \alpha \end{cases} ,$$

e, para a coordenada s , temos,

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial s} = m g \sin \alpha \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m \dot{s} + m \dot{\psi} \cos \alpha \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = 2 m \ddot{s} + m \ddot{\psi} \cos \alpha \end{cases} .$$

Assim, aplicando as Equações de Lagrange, obtemos,

$$\begin{cases} (m + M) \ddot{\psi} + m \ddot{s} \cos \alpha = 0 \\ 2 \ddot{s} + \ddot{\psi} \cos \alpha - g \sin \alpha = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

Resolvendo o Sistema (4.18), encontramos,

$$\begin{cases} \ddot{s} = \frac{(m + M) g \sin \alpha}{2(m + M) - m \cos^2 \alpha} \\ \ddot{\psi} = \frac{-m g \sin \alpha \cos \alpha}{2(m + M) - m \cos^2 \alpha} \end{cases} \quad .$$

Também, da primeira equação do Sistema (4.18), temos que,

$$\frac{d}{dt} [(m + M) \dot{\psi} + m \dot{s} \cos \alpha] = 0 \implies (m + M) \dot{\psi} + m \dot{s} \cos \alpha = cte, \quad (4.19)$$

onde o primeiro termo da última expressão representa o componente x do Momento Linear do sistema total enquanto que o segundo termo, o componente x do Momento Linear do aro em relação ao plano.

Assim, a Equação (4.19) significa que o componente x do Momento Linear Total é uma constante do Movimento. Este é o resultado esperado porque nenhuma força externa é aplicada ao longo do eixo x .

04) Um Pêndulo Simples de comprimento b e massa m é amarrado a um suporte sem massa movendo-se verticalmente para cima com aceleração constante a . Determine:

a) As Equações do Movimento;

b) O período para pequenas oscilações.

Resolução: a) Considerando $\dot{y}_o = 0$, temos que,

$$\begin{cases} x = b \sin \theta \implies \dot{x} = b \dot{\theta} \cos \theta \\ y = -y_o - b \cos \theta + \frac{a t^2}{2} \implies \dot{y} = b \dot{\theta} \sin \theta + a t \end{cases} \quad ,$$

e então,

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m (b^2 \dot{\theta}^2 + a^2 t^2 + 2 a b t \dot{\theta} \sin \theta) \\ U = m g y \implies U = m g (-y_o - b \cos \theta + \frac{a t^2}{2}) \end{cases} \quad .$$

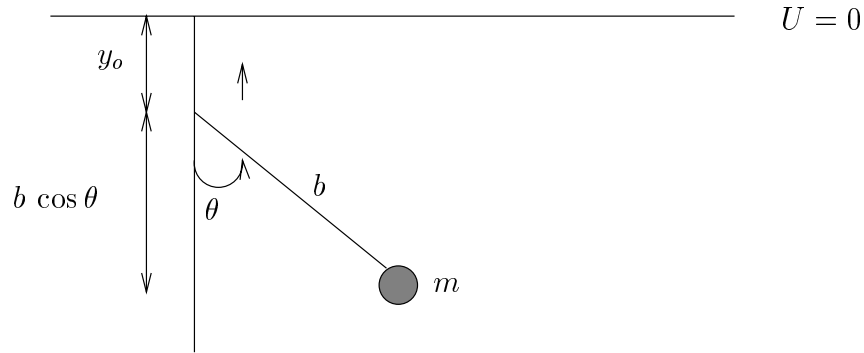


Figura 4.17: Exercício 4.

Assim,

$$L = T - U \implies L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m (b^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + a^2 t^2 + 2 a b t \dot{\theta} \sin \theta) + m g y_0 + m g b \cos \theta - m g \frac{a t^2}{2}.$$

Para a Coordenada θ , temos,

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \theta} = m a b \dot{\theta} t \cos \theta - m g b \sin \theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m b^2 \dot{\theta} + m a b t \sin \theta \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m b^2 \ddot{\theta} + m a b \sin \theta + m a b t \dot{\theta} \cos \theta \end{cases}.$$

Aplicando as Equações de Lagrange, temos,

$$\ddot{\theta} + \frac{a + g}{b} \sin \theta = 0.$$

b) Para $\theta \ll 1$, podemos considerar $\sin \theta = \theta$. Logo,

$$\ddot{\theta} + \frac{a + g}{b} \theta = 0 \implies \ddot{\theta} + \omega_o^2 \theta = 0 \implies \omega_o^2 = \frac{a + g}{b}.$$

Como, $\omega_o = \frac{2\pi}{T}$, então,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{b}{a + g}},$$

que é o período para pequenas oscilações.

05) Uma partícula de massa m pode deslizar livremente ao longo de um fio AB cuja distância perpendicular à origem é h . A linha \overline{OC} gira em torno da origem com uma velocidade angular $\dot{\theta} = \omega$. A posição da partícula pode ser descrita em termos do ângulo θ e da distância $q(t)$ do ponto C . Se a partícula está sujeita a uma força gravitacional, e se as condições iniciais são: $\theta(0) = 0$, $q(0) = 0$ e $\dot{q}(0) = 0$, mostre que a dependência temporal da coordenada $q(t)$ é,

$$q(t) = \frac{g}{2\omega^2} (\cosh \omega t - \cos \omega t).$$

Compute o Hamiltoniano para o sistema, e compare com a Energia Total. É a Energia Total conservada?

Resolução: As condições iniciais são:

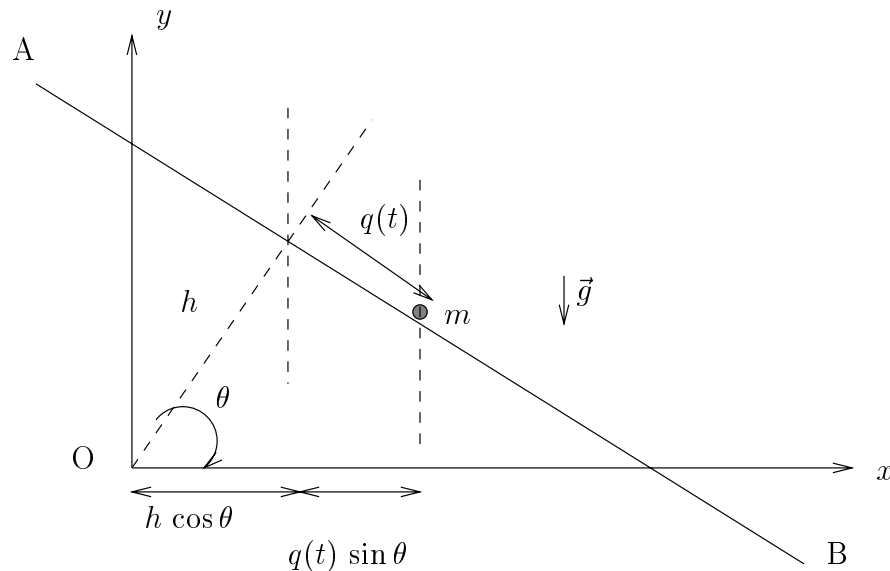


Figura 4.18: Exercício 5.

$$\begin{cases} \theta(0) = 0 \\ q(0) = 0 \\ \dot{q}(0) = 0 \end{cases}.$$

Mas,

$$\dot{\theta} = \omega \implies \theta = \omega t + \theta_0 \implies \theta(t) = \omega t.$$

As Coordenadas de m são:

$$\begin{cases} x = h \cos \omega t + q(t) \sin \omega t \implies \dot{x} = -h\omega \sin \omega t + \omega q(t) \cos \omega t + \dot{q}(t) \sin \omega t \\ y = h \sin \omega t - q(t) \cos \omega t \implies \dot{y} = h\omega \cos \omega t + \omega q(t) \sin \omega t - \dot{q}(t) \cos \omega t \end{cases}.$$

Então,

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m (\omega^2 h^2 + \omega^2 q^2 + \dot{q}^2 - 2\omega h \dot{q}) \\ U = m g y \implies U = m g (h \sin \omega t - q \cos \omega t) \end{cases}.$$

Assim,

$$L = T - U \implies L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m (\omega^2 h^2 + \omega^2 q^2 + \dot{q}^2 - 2\omega h \dot{q}) - m g (h \sin \omega t - q \cos \omega t).$$

Para a Coordenada q , temos,

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial q} = m q \omega^2 + m g \cos \omega t \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m (\dot{q} - \omega h) \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \ddot{q} \end{cases} .$$

Aplicando as Equações de Lagrange, temos,

$$\ddot{q} - \omega^2 q = g \cos \omega t ,$$

que é uma equação diferencial de segunda ordem, não homogênea. Para resolvê-la, escrevamos a equação homogênea associada, isto é,

$$\ddot{q} - \omega^2 q = 0 \implies m^2 - \omega^2 = 0 \longrightarrow m = \pm \omega ,$$

e, a solução da equação homogênea associada pode ser escrita como,

$$q_H(t) = A e^{\omega t} + B e^{-\omega t} .$$

A solução particular é do tipo,

$$q_P(t) = C \cos \omega t \longrightarrow \dot{q}(t) = -\omega C \sin \omega t \longrightarrow \ddot{q}(t) = -\omega^2 C \cos \omega t .$$

Substituindo na equação diferencial, encontramos que, $C = -\frac{g}{2\omega^2}$. Logo, podemos escrever a Solução Particular como,

$$q_P(t) = -\frac{g}{2\omega^2} \cos \omega t ,$$

e portanto, a solução geral da equação diferencial é dada por,

$$q(t) = q_H(t) + q_P(t) = A e^{\omega t} + B e^{-\omega t} - \frac{g}{2\omega^2} \cos \omega t .$$

Para determinar as constantes A e B , temos que,

$$\begin{cases} q(0) = 0 \implies A + B = \frac{g}{2\omega^2} \\ \dot{q}(0) = 0 \implies A = B = \frac{g}{4\omega^2} \end{cases} .$$

Finalmente,

$$q(t) = \frac{g}{4\omega^2} (e^{\omega t} - e^{-\omega t}) - \frac{g}{2\omega^2} \cos \omega t \implies q(t) = \frac{g}{2\omega^2} (\cosh \omega t - \cos \omega t)$$

Temos que,

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \dot{q} - m \omega h$$

Como,

$$H = p \dot{q} - L = (m \dot{q} - m \omega h) \dot{q} - \frac{1}{2} m (\omega^2 h^2 + \omega^2 q^2 + \dot{q}^2 - 2 \omega h \dot{q}) + m g (h \sin \omega t - q \cos \omega t).$$

Assim,

$$H = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 h^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 + m g h \sin \omega t - m g q \cos \omega t.$$

Como H contém explicitamente o tempo, $H \neq E$ e assim, a Energia não é conservada. A partícula ganha energia do campo gravitacional.

06) Uma partícula de massa m é atraída por uma força central de intensidade $\frac{k}{r^2}$. Use coordenadas polares e encontre as Equações de Hamilton do Movimento.

Resolução: Temos que,

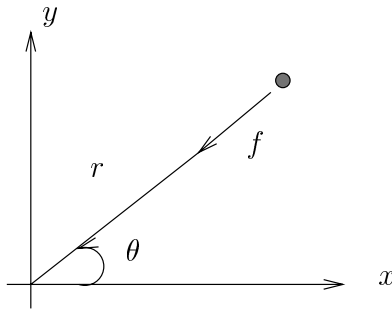


Figura 4.19: Exercício 6.

$$F = -\frac{k}{r^2} = -\frac{dU}{dr} \implies dU = \frac{k}{r^2} dr \implies U = -\frac{k}{r} + U_o; U_o = 0 \implies U = -\frac{k}{r},$$

e,

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2),$$

e portanto,

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{k}{r}.$$

Como,

$$\left\{ \begin{array}{l} H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} - L \\ p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \implies \dot{r} = \frac{p_r}{m} \\ p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \implies \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m r^2} \end{array} \right.$$

Logo,

$$H = \frac{1}{2} \frac{p_r^2}{m} + \frac{1}{2} \frac{p_\theta^2}{m r^2} - \frac{k}{r}.$$

As Equações de Hamilton do Movimento são,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{m r^3} - \frac{k}{r^2} \\ \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \\ \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \\ \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{m r^2} \end{array} \right. .$$

Observe que θ é uma coordenada cíclica pois, $\dot{p}_\theta = 0 \implies p_\theta = \text{cte}$.

07) Uma mola sem massa, de comprimento l_o (sem tensão), tem uma massa pontual m conectada em uma das suas extremidades e a outra fixa, de modo que a mola pende em um campo gravitacional como mostra a Figura (4.20). O movimento do sistema é apenas no plano vertical.

a) Escreva a Lagrangeana do sistema;

b) Encontre as Equações de Lagrange usando as variáveis θ , $\lambda = \frac{(r - r_o)}{r_o}$, onde r_o é o comprimento em repouso da massa m suspensa. Use $\omega_s^2 = \frac{k}{m}$ e $\omega_p^2 = \frac{g}{r_o}$;

c) Resolva as equações com a aproximação de mais baixa ordem do movimento quando θ e λ são pequenos. Considere $\theta(0) = 0$, $\lambda(0) = 0$, $\lambda(0) = A$, $\dot{\theta}(0) = \omega_p B$, onde A e B são constantes.

Resolução: a) Em Coordenadas Polares,

$$\left\{ \begin{array}{l} T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \\ U = -m g r \cos \theta + \frac{1}{2} k (r - l_o)^2 \end{array} \right. .$$

Logo,

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + m g r \cos \theta - \frac{1}{2} k (r - l_o)^2$$

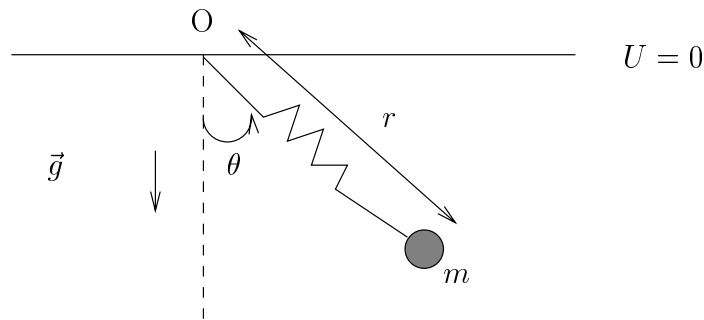


Figura 4.20: Exercício 7.

b) Para a coordenada θ , temos,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \theta} = -m g r \sin \theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \ddot{\theta} + 2 m r \dot{r} \dot{\theta} \end{array} \right. .$$

Aplicando as Equações de Lagrange, obtemos,

$$r^2 \ddot{\theta} + 2 r \dot{r} \dot{\theta} + g r \sin \theta = 0 ,$$

mas,

$$\left\{ \begin{array}{l} k (r_o - l_o) = m g \\ \lambda = \frac{r - r_o}{r_o} \implies r = r_o (1 + \lambda) \implies \dot{R} = r_o \dot{\lambda} \implies \ddot{r} = r_o \ddot{\lambda} \end{array} \right. ,$$

logo,

$$r - l_o = \lambda r_o + \frac{m g}{k} ,$$

e assim,

$$(1 + \lambda) \ddot{\theta} + 2 \dot{\lambda} \dot{\theta} + \frac{g}{r_o} \sin \theta = 0 ,$$

Para a coordenada r , temos,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot{\theta}^2 + m g \cos \theta - k (r - l_o) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \ddot{r} \end{array} \right. .$$

Aplicando as Equações de Lagrange, obtemos,

$$\ddot{\lambda} + \frac{k}{m} \lambda - (1 + \lambda) \dot{\theta}^2 + \frac{g}{r_o} (1 - \cos \theta) = 0$$

Assim,

$$\begin{cases} (1 + \lambda) \ddot{\theta} + 2 \dot{\lambda} \dot{\theta} + \frac{g}{r_o} \sin \theta = 0 \\ \ddot{\lambda} + \frac{k}{m} \lambda - (1 + \lambda) \dot{\theta}^2 + \frac{g}{r_o} (1 - \cos \theta) = 0 \end{cases} .$$

c) Fazendo $\omega_s^2 = \frac{k}{m}$ e $\omega_p^2 = \frac{g}{r_o}$, temos,

$$\begin{cases} (1 + \lambda) \ddot{\theta} + 2 \dot{\lambda} \dot{\theta} + \omega_p^2 \sin \theta = 0 \\ \ddot{\lambda} + \omega_s^2 \lambda - (1 + \lambda) \dot{\theta}^2 + \omega_p^2 (1 - \cos \theta) = 0 \end{cases} .$$

Na aproximação de mais baixa ordem, $\cos \theta = 1$, $\dot{\lambda} = \dot{\theta} = 0$, $\sin \theta = 0$ e, $1 + \lambda \cong 1$. Logo,

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \omega_p^2 \theta = 0 \\ \ddot{\lambda} + \omega_s^2 \lambda = 0 \end{cases} .$$

A solução da equação em λ , é,

$$\lambda(t) = C_1 e^{i\omega_s t} + C_2 e^{-i\omega_s t} .$$

Como, $\lambda(0) = A$ e $\dot{\lambda}(0) = 0$, então,

$$\lambda(t) = A \cos \omega_s t .$$

De maneira análoga, a solução da equação em θ é,

$$\theta(t) = C_3 e^{i\omega_p t} + C_4 e^{-i\omega_p t} .$$

Como, $\theta(0) = 0$ e $\dot{\theta}(0) = \omega_p B$, então,

$$\theta(t) = B \sin \omega_p t .$$

Assim, λ e θ oscilam com frequências ω_s e ω_p , respectivamente; as duas oscilações diferem em fase por $\frac{\pi}{2}$.

08) Um Pêndulo Simples está preso a um suporte, de massa desprezível, que se move horizontalmente como mostra a Figura (4.21).

a) Escreva a Lagrangeana do sistema;

b) Encontre as Equações de Lagrange do Movimento;

c) Para pequenos deslocamentos angulares e um movimento do suporte dado por $y_s = y_0 \cos \omega t$, encontre a solução da Equação do Movimento, para o Estado Estacionário.

Resolução: Temos que,

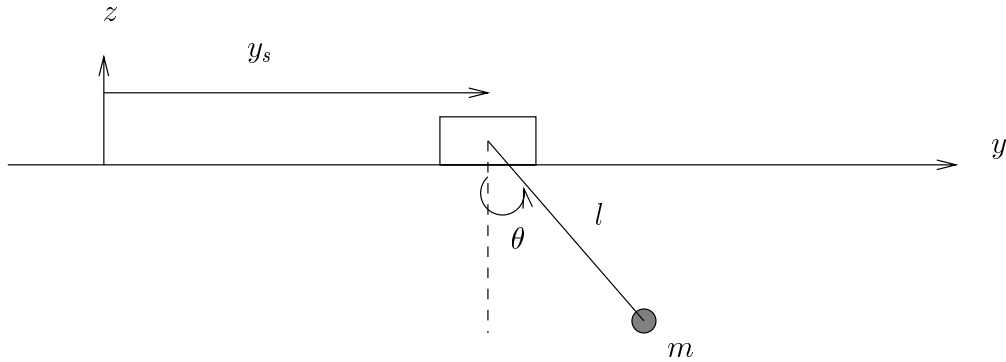


Figura 4.21: Exercício 8.

$$\begin{cases} y = y_s + l \sin \theta \implies \dot{y} = \dot{y}_s + l \dot{\theta} \cos \theta \\ z = -l \cos \theta \implies \dot{z} = l \dot{\theta} \sin \theta \end{cases} .$$

Então, as energias cinética e potencial do sistema podem ser escritas como,

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} m (\dot{y}_s^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2l \dot{\theta} \dot{y}_s \cos \theta) \\ U = -m g l \cos \theta \end{cases} ,$$

e, a Lagrangeana será dada por,

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{y}_s^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2l \dot{\theta} \dot{y}_s \cos \theta) + m g l \cos \theta .$$

b) Para a coordenada θ , temos,

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \theta} = -m l \dot{\theta} \dot{y}_s \sin \theta - m g l \sin \theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \dot{\theta} + m l \dot{y}_s \cos \theta \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \ddot{\theta} - m l \dot{y}_s \dot{\theta} \sin \theta + m l \ddot{y}_s \cos \theta \end{cases} .$$

Aplicando a Equação de Lagrange, temos,

$$\ddot{\theta} + \frac{\cos \theta}{l} \ddot{y}_s + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 .$$

c) Para $y_s = y_o \cos \omega t$, temos que,

$$\dot{y}_s = -\omega y_o \sin \omega t \implies \ddot{y}_s = -\omega^2 y_o \cos \omega t .$$

Logo,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta - \frac{\omega^2 y_o}{l} \cos \theta \cos \omega t = 0 .$$

Para ângulos pequenos, $\sin \theta \equiv \theta$ e $\cos \theta = 1$. Portanto,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta - \frac{\omega^2 y_o}{l} \cos \omega t = 0 \implies \ddot{\theta} + \omega_o^2 \theta = \frac{\omega^2 y_o}{l} \cos \omega t ,$$

onde, $\omega_o = \frac{g}{l}$. Esta equação é uma equação diferencial de segunda ordem, não homogênea.

Considerando a equação homogênea associada dada por,

$$\ddot{\theta} + \omega_o^2 \theta = 0 ,$$

cuja solução é,

$$\theta_H = A \cos \omega_o t + B \sin \omega_o t ,$$

e a solução particular é do tipo,

$$\theta_P = C \cos \omega t \implies \dot{\theta}_P = -\omega C \sin \omega t \implies \ddot{\theta}_P = -\omega^2 C \cos \omega t ,$$

e assim, substituindo na equação geral, obtemos que,

$$C = \frac{\omega^2 y_o}{l (\omega_o^2 - \omega^2)} .$$

Portanto a solução particular é dada por,

$$\theta_P = \frac{\omega^2 y_o}{l (\omega_o^2 - \omega^2)} \cos \omega t .$$

Então, a solução geral é,

$$\theta(t) = \theta_H(t) + \theta_P(t) \implies \theta(t) = A \cos \omega_o t + B \sin \omega_o t + \frac{\omega^2 y_o}{l (\omega_o^2 - \omega^2)} \cos \omega t .$$

Considerando $\theta(0) = 0$ e $\dot{\theta}(0) = 0$, obtemos que,

$$\begin{cases} A = -\frac{y_o}{l} \frac{\omega^2}{(\omega_o^2 - \omega^2)} \\ B = 0 \end{cases} ,$$

e assim,

$$\theta(t) = \frac{y_o}{l} \frac{\omega^2}{\omega_o^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_o t) .$$

A ressonância ocorre se $\omega_o = \omega$. Para $\omega_o \neq \omega$, o movimento do sistema é estacionário.

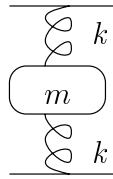


Figura 4.22: Exercício 01.

4.10 Problemas Propostos

- 01) Usando o formalismo de Lagrange, encontre a frequência angular e a posição de equilíbrio do sistema representado na Figura (4.22), na presença de um campo gravitacional vertical.
- 02) Um pêndulo duplo consiste de dois pêndulos simples, com um deles suspenso da massa do outro. Se os dois pêndulos tem igual comprimento e mesma massa e ambos os pêndulos estão confinados a moverem-se no mesmo plano, encontre as Equações de Lagrange do movimento para o sistema. Não assuma pequenos ângulos.
- 03) Um pêndulo consiste de uma massa m suspensa por uma mola de massa desprezível com comprimento não distendido b e constante de força k . Encontre as Equações de Lagrange do movimento.
- 04) O ponto de suporte de um pêndulo simples de massa m e comprimento b está preso num ponto que se desloca horizontalmente de acordo com a expressão $x = a \sin \omega t$. Encontre a Equação do movimento do pêndulo.
- 05) Uma partícula de massa m move-se em uma dimensão sob a influência de uma força $F(x, t) = (k/x^2) e^{-t/\tau}$, onde k e τ são constantes positivas. Encontre as funções Lagrangeana e Hamiltoniano. Compare o Hamiltoniano e a Energia Total, e discuta a Conservação da Energia para o sistema.
- 06) Uma partícula de massa m move-se sob a influência da gravidade ao longo da espiral $z = k\theta$ e $r = cte$, onde k é uma constante e z é vertical. Obtenha as Equações de Hamilton do movimento.
- 07) Determine o Hamiltoniano e as Equações de Hamilton do movimento para um pêndulo simples.
- 08) Considere um pêndulo simples consistindo de uma massa m presa a uma corda de comprimento l . Após o pêndulo estar em movimento, o comprimento da corda é encurtado a uma taxa constante $\frac{dl}{dt} = -\alpha = cte$. O ponto de suspensão permanece fixo. Calcule as funções Lagrangeana e Hamiltoniano. Compare o Hamiltoniano e a Energia Total e discuta a Conservação da Energia para o sistema.
- 09) Uma partícula sob a ação da gravidade, desloca-se sobre o interior de um parabolóide de revolução liso cujo eixo é vertical. Usando a distância do eixo, r , e o ângulo azimutal ϕ como

Coordenadas Generalizadas e sabendo que o parabolóide de revolução é gerado por uma parábola representada, em Coordenadas Cilíndricas, por $z = Ar^2$, com A uma constante positiva, encontre:

- a Lagrangeana do sistema;
 - os Momentos Generalizados e o correspondente Hamiltoniano;
 - a Equação do movimento para a Coordenada r como uma função do tempo;
 - se $\frac{d\phi}{dt} = 0$, mostre que a partícula pode executar pequenas oscilações em torno do ponto mais baixo do parabolóide, e encontre a frequência destas oscilações.
- 10) A Figura (4.23) representa um pêndulo de massa m e comprimento l preso no ponto P a um sistema de molas de constantes k , fixas aos suportes A e B .

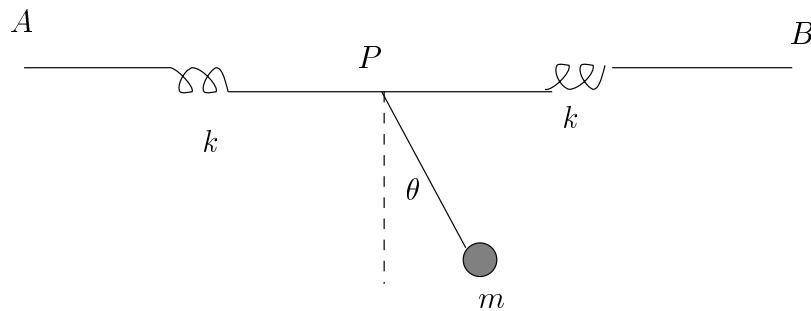


Figura 4.23: Exercício 10.

- Escreva a função Lagrangeana do sistema;
- Encontre as Equações do movimento;
- Mostre que o sistema oscila com um período, para pequenas oscilações, dado por $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} + \frac{m}{2k}}$.

5

Movimento em Força Central

5.1 Introdução

O movimento de um sistema que consiste de dois corpos sujeitos a uma força dirigida ao longo da linha conectando os centros dos dois corpos, isto é, uma Força Central, é um problema físico extremamente importante. A importância está em dois domínios bastante diferentes da Física: O Movimento dos Corpos Celestes - Planetas, Luas, Cometas, etc - e em certas Interações Nucleares de dois corpos, tais como o Espalhamento de Partículas α por núcleos.

No dias Pré Mecânica Quântica, os físicos também descreveram o Átomo de Hidrogênio em termos de uma Força Central Clássica entre dois corpos. Tal descrição é útil no sentido qualitativo mas, para uma descrição mais detalhada, a aproximação da teoria Quântica deve ser usada.

5.2 Massa Reduzida

A descrição de um sistema constituído de duas partículas requer a especificação de 6(seis) quantidades: por exemplo, as componentes de cada vetor posição \vec{r}_1 e \vec{r}_2 para as partículas. Também podemos escolher as 3(três) componentes do vetor posição do Centro de Massa, \vec{R} , e as 3 (três) componentes de $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$.

Consideremos apenas sistemas sem perdas por atrito e cuja Energia Potencial é uma função apenas de $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$.

A Lagrangeana para o sistema pode ser escrita como,

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{r}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}_2^2 - U(r). \quad (5.1)$$

Escolhendo a origem do sistema de Coordenadas no Centro de Massa das partículas, isto é, $\vec{R} = 0$, então,

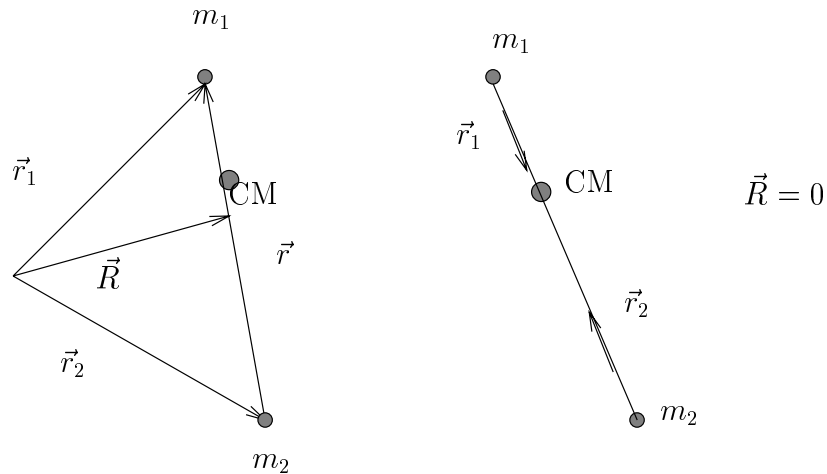


Figura 5.1: Representação do Centro de Massa de um sistema de duas partículas.

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0 .$$

Como, $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, temos que,

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \implies \vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \\ \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \implies \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \end{cases} \quad (5.2)$$

Substituindo (5.2) em (5.1), obtemos,

$$L = \frac{1}{2} m_1 \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m_2 \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{r}^2 - U(r) \implies L = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 - U(r) ,$$

onde, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ é a Massa Reduzida.

Assim, reduzimos formalmente o problema do movimento de corpos a um problema equivalente de um corpo, em que devemos apenas determinar o movimento de uma “partícula” de massa μ no Campo Central descrito pela Função Potencial $U(r)$. Uma vez obtida a solução para $\vec{r}(t)$ podemos encontrar os movimentos individuais das partículas $\vec{r}_1(t)$ e $\vec{r}_2(t)$, usando as Equações (5.2).

5.3 Teoremas da Conservação - Primeiras Integrais do Movimento

O sistema que desejamos discutir consiste de uma partícula de massa μ movendo-se em um Campo de Força Central descrito por uma Função potencial $U(r)$. Como a Energia Potencial depende apenas da distância da partícula ao Centro de Força e não da orientação, o sistema

possui Simetria Esférica, isto é, a rotação do sistema em torno de qualquer eixo fixo que passa através do Centro de Força não pode afetar as Equações do Movimento. Dessa forma, o Momento Angular é Conservado, isto é,

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = cte .$$

Desta relação, está claro que ambos, o raio vetor e o vetor Momento Linear da partícula estão situados sempre em um plano normal ao vetor Momento Angular \vec{l} , que é fixo no espaço, como mostrado na Figura (5.2). Portanto, temos um problema bidimensional e, a

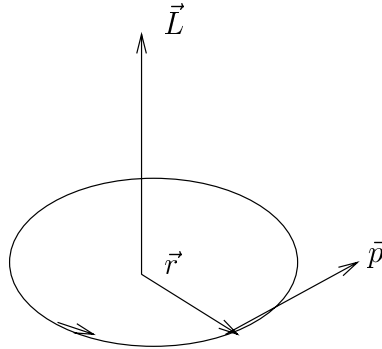


Figura 5.2: Representação do Vetor Momento Angular.

Lagrangeana deve ser convenientemente expressa em Coordenadas Polares Planas, ou seja,

$$L = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - U(r) .$$

Como a Lagrangeana é cíclica em θ , o Momento Angular Conjugado à Coordenada θ é conservado, ou seja,

$$\dot{p}_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \implies p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta} = cte .$$

A simetria do sistema tem portanto nos permitido integrar imediatamente uma das Equações do Movimento. A quantidade p_θ é uma Primeira Integral do Movimento, e é chamada de l ,

$$l = \mu r^2 \dot{\theta} = cte ,$$

que tem uma interpretação geométrica simples. Observando a Figura (5.3) vemos que, descrevendo o caminho $\vec{r}(t)$, o raio vetor varre uma área $\frac{1}{2} r^2 d\theta$ em um intervalo dt , assim,

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta \implies \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} .$$

Como $l = \mu r^2 \dot{\theta}$, então, $r^2 \dot{\theta} = \frac{l}{\mu}$. Logo,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{l}{2\mu} = cte .$$

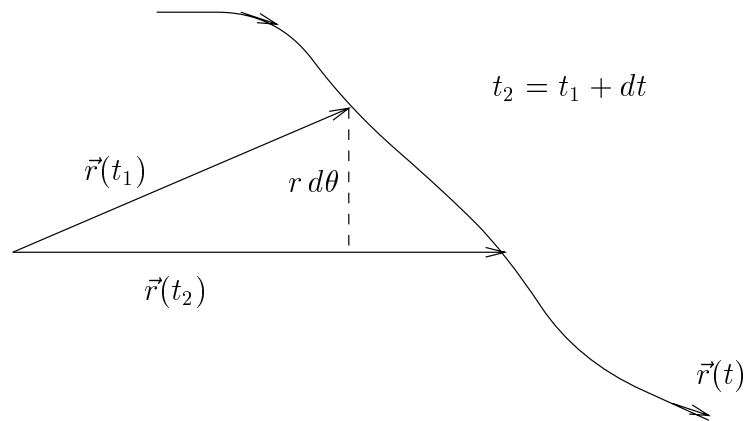


Figura 5.3: Interpretação Geométrica do Vetor Momento Angular.

Assim, a Velocidade Areal é constante no tempo. Este resultado foi obtido empiricamente por Kepler para Movimentos Planetários e, é conhecido como a Segunda Lei de Kepler. É importante notar que a Conservação da Velocidade Areal não está limitada a uma Força do tipo inverso do quadrado (o caso do Movimento Planetário) mas, é um resultado geral para Movimentos de Força Central.

Como estamos nos limitando à sistemas não dissipativos, a Energia Total é conservada. assim,

$$T + U = E = cte \implies E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2} + U(r). \quad (5.3)$$

5.4 Equações de Movimento

Quando $U(r)$ é especificada, a Equação (5.3) descreve completamente o sistema e a integração desta equação dá a solução geral do problema em termos dos parâmetros E e l .

Assim,

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - U) - \frac{l^2}{\mu^2 r^2}}. \quad (5.4)$$

A Equação (5.4) pode ser resolvida para dt e integrada para fornecer a solução $t = t(r)$. Uma inversão deste resultado dá a Equação do Movimento na forma padrão $r = r(t)$. Contudo, nos interessa a equação do caminho em termos de r e θ .

Temos que,

$$d\theta = \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{dr} dr = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}} dr.$$

Logo,

$$\theta = \int \frac{\pm \left(\frac{l}{r^2}\right) dr}{\sqrt{2\mu \left[E - U - \frac{l^2}{2\mu r^2}\right]}}.$$

É importante observar que, como l é constante no tempo, $\dot{\theta}$ não pode variar o sinal e portanto, $\theta(t)$ deve aumentar monotonicamente com o tempo.

Embora tenhamos reduzido o problema ao cálculo formal de uma integral, a solução real pode ser obtida apenas para certas formas específicas das Leis de Força.

Se a Força é proporcional a alguma potência da distância radial, isto é, $F(r) \propto r^n$, então a solução pode ser expressa em termos de integrais elípticas para certos valores inteiros e fracionários de n . Só para $n = 1, -2$ e -3 , as soluções são expressas em termos de funções circulares.

O caso $n = 1$ é exatamente aquele do oscilador harmônico; O caso $n = -2$ é a importante Força do Inverso do Quadrado. Estes dois casos, são de fundamental importância em situações físicas.

Portanto, temos resolvido o problema de uma maneira formal combinando as Equações que expressam a Conservação da Energia e Momento Angular em um resultado único, que dá a Equação da Órbita $\theta = \theta(r)$.

Considerando agora a equação de Lagrange para a Coordenada r , isto é, $\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 0$ e, como,

$$L = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - U(r),$$

então,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial r} = \mu r \dot{\theta}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \mu \dot{r} \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \mu \ddot{r} \end{array} \right. \quad (5.5)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mu r \dot{\theta}^2 - \overbrace{\frac{\partial U}{\partial r}}^{=-F(r)} - \mu \ddot{r} &= 0 \implies \\ (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) &= \frac{F(r)}{\mu}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

A Equação (5.6) pode ser escrita de uma forma mais conveniente para certos tipos de cálculos.

Seja, $u = \frac{1}{r}$. Então,

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \dot{r}.$$

Como $\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2}$, então,

$$\frac{du}{d\theta} = -\mu \frac{\dot{r}}{l},$$

e,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta} \left(-\mu \frac{\dot{r}}{l} \right) = -\mu \frac{\ddot{r}}{l \dot{\theta}}.$$

Como, $\dot{\theta} = \frac{l}{\mu} u^2$, então,

$$\ddot{r} = -\frac{l^2}{\mu^2} u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}.$$

Assim, substituindo em (5.6), obtemos,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu}{l^2} \frac{1}{u^2} F\left(\frac{1}{u}\right), \quad (5.7)$$

ou,

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{\mu}{l^2} r^2 F(r). \quad (5.8)$$

A Equação (5.8) é particularmente útil se desejamos encontrar a Lei de Força que dá uma órbita particular conhecida $r = r(\theta)$.

EXEMPLO 1: Encontre a Lei de Força para um Campo de Força Central que permite uma partícula mover-se em uma órbita espiral logarítmica dada por $r = k e^{\alpha\theta}$, onde k e α são constantes.

Resolução:

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r}\right) = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{e^{-\alpha\theta}}{k}\right) = -\frac{\alpha}{k} e^{-\alpha\theta} \implies \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\alpha^2}{r}.$$

Logo, usando a Equação (5.8), obtemos,

$$F(r) = -\frac{l^2}{\mu r^3} (\alpha^2 + 1).$$

Assim, a Lei de Força é uma Força Atrativa e Inverso do Cubo.

EXEMPLO 2: Determine $r(t)$ e $\theta(t)$ para o problema do Exemplo 1.

Resolução: Temos que,

$$l = \mu r^2 \dot{\theta} \implies \frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{\mu k^2 e^{2\alpha\theta}} \implies e^{2\alpha\theta} d\theta = \frac{l}{\mu k^2} dt,$$

e, assim,

$$\theta(t) = \frac{1}{2\alpha} \ln \left[\frac{2\alpha l}{\mu k^2} t + C' \right].$$

Como, $r^2 = k^2 e^{2\alpha\theta}$ e $e^{2\alpha\theta} = \frac{2\alpha l}{\mu k^2} t + C'$, então,

$$r = \left[\frac{2\alpha l}{\mu} t + k^2 C' \right]^{1/2},$$

onde, l e C' são determinadas pelas condições iniciais do problema.

EXEMPLO 3: Qual a Energia Total da órbita dos exemplos anteriores?

Resolução: Sabemos que,

$$\begin{aligned} U(r) &= - \int F dr = \frac{l^2 (\alpha^2 + 1)}{\mu} \int \frac{dr}{r^3} = -\frac{1}{2} \frac{l^2 (\alpha^2 + 1)}{\mu} r^{-2} + \overbrace{U(\infty)}^{=0} \implies \\ U(r) &= -\frac{l^2 (\alpha^2 + 1)}{2\mu} \frac{1}{r^2}. \end{aligned}$$

Também,

$$\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2} = \dot{r} \frac{d\theta}{dr} \implies \dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \frac{l}{\mu r^2},$$

e, $\frac{dr}{d\theta} = \alpha r$, então, $\dot{r} = \frac{\alpha l}{\mu r}$.

Como,

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2} + U(r) \implies E = 0.$$

5.5 Órbitas em um Campo Central

A velocidade radial de uma partícula movendo-se em um Campo Central é dada pela Equação (5.4), ou seja,

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - U) - \frac{l^2}{\mu^2 r^2}}. \quad (5.9)$$

Esta equação indica que \dot{r} anula-se para as raízes do radical, isto é, para pontos para os quais,

$$E - U(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} = 0. \quad (5.10)$$

A anulação de \dot{r} significa que um PONTO DE RETORNO no movimento foi atingido. Em geral a Equação (5.9) possui duas raízes: $r_{\text{máx}}$ e $r_{\text{mín}}$. O movimento da partícula está, portanto, confinado à região anelar especificada por $r_{\text{mín}} \leq r \leq r_{\text{máx}}$. Certas combinações da função potencial, $U(r)$, e os parâmetros E e l , produzem uma única raiz para a Equação (5.10). Em tal situação, $\dot{r} = 0$ para todos os valores do tempo; por isso, $r = \text{cte}$, e a órbita é CIRCULAR.

Se o movimento de uma partícula no Potencial $U(r)$ é periódico, então a órbita é Fechada; ou seja, após um número finito de excursões entre os limites radiais $r_{\text{máx}}$ e $r_{\text{mín}}$, o movimento se repete. Mas, se a órbita não é fechada sobre si mesma, após um número finito de oscilações, a órbita é dita ser Aberta.

Computemos a variação no ângulo θ resultante de uma transição completa de r para $r_{\text{mín}}$, para $r_{\text{máx}}$ e, de volta para $r_{\text{mín}}$. Como o movimento é simétrico no tempo, esta variação angular é o dobro daquela que resultará da passagem de $r_{\text{mín}}$ para $r_{\text{máx}}$. Assim,

$$\Delta\theta = 2 \int \frac{\left(\frac{l}{r^2}\right) dr}{\sqrt{2\mu\left(E - U - \frac{l^2}{2\mu r^2}\right)}} \quad (5.11)$$

O caminho é fechado só se $\Delta\theta$ é uma fração racional de 2π , isto é, se $\Delta\theta = 2\pi\left(\frac{a}{b}\right)$, onde a e b são inteiros. Sob estas condições, após b períodos, o raio vetor da partícula terá feito a revoluções completas e terá retornado à sua posição inicial. Se o Potencial varia com alguma potência inteira da distância radial, $U(r) \propto r^{n+1}$, então um caminho não circular fechado só pode resultar se $n = -2$ ou $n = +1$. O caso $n = -2$, corresponde a uma Lei de Força Inversa do Quadrado, por exemplo, a Força Gravitacional ou Eletrostática. O caso $n = -1$, corresponde ao Potencial Oscilador Harmônico.

5.6 Energia Centrífuga e Potencial Efetivo

Nas expressões precedentes para \dot{r} e $\Delta\theta$, e assim por diante, um termo comum é o radical,

$$\sqrt{E - U - \frac{l^2}{2\mu r^2}}.$$

O último termo no radical tem as dimensões de Energia e, como $l = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{cte}$, podemos escrever,

$$\frac{l^2}{2\mu r^2} = \frac{\mu^2 r^4 \dot{\theta}^2}{2\mu r^2} \implies \frac{l^2}{2\mu r^2} = \frac{1}{2} \mu r^2 \dot{\theta}^2.$$

Se interpretarmos esta quantidade como uma “Energia Potencial”, $U_c \equiv \frac{l^2}{2\mu r^2}$, então, a “Força” que deve ser associada com U_c é,

$$F_c = -\frac{\partial U_c}{\partial r} = \frac{l^2}{2\mu r^3} = \mu r \dot{\theta}^2.$$

Esta quantidade é tradicionalmente chamada de “Força Centrífuga”, embora não seja uma Força no sentido ordinário da palavra. Contudo, continuaremos a usá-la por hábito e conveniência.

Assim, o termo $\frac{l^2}{2\mu r^2}$ pode ser interpretado como a Energia Potencial Centrífuga da partícula e, como tal, pode ser incluída com $U(r)$ em uma Energia Potencial Efetiva, $V(r)$, definida por,

$$F(r) = -\frac{k}{r^2} \implies U(r) = -\int F(r) dr \implies U(r) = -\frac{k}{r} \implies V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2}.$$

Este Potencial Efetivo, $V(r)$, e suas componentes estão mostradas na Figura (5.4).

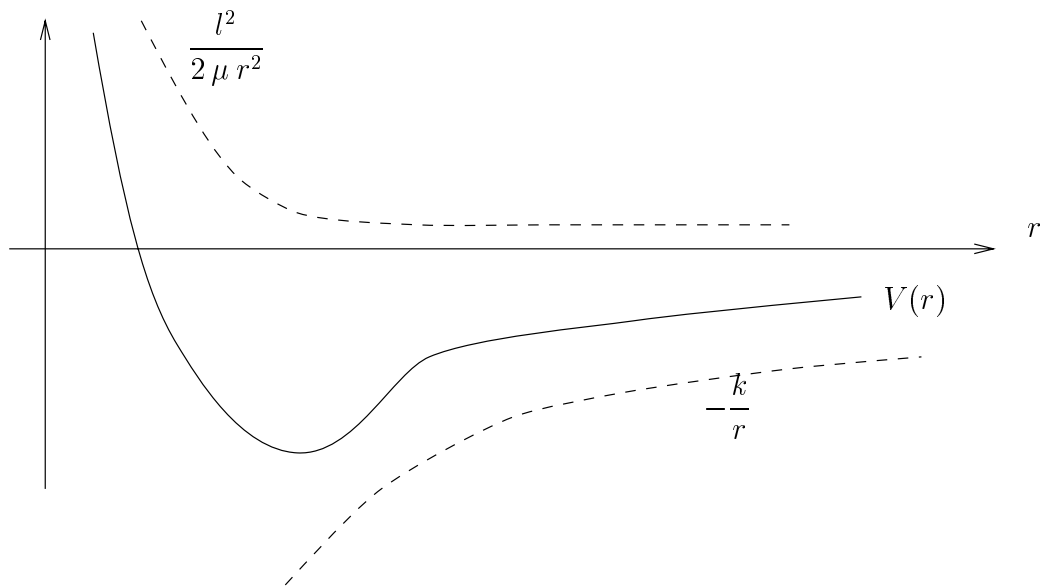


Figura 5.4: Representação do Potencial Efetivo.

O valor do potencial é, arbitrariamente, considerado zero para $r = \infty$.

Se plotarmos a Energia Total E da partícula em um diagrama como o mostrado na Figura (5.5), podemos identificar três regiões de interesse.

Se a Energia Total é positiva ou zero ($E_1 \geq 0$), então o movimento é Não Limitado; a partícula move-se na direção do Centro de Força ($r = 0$) até “bater” na barreira de Potencial no “Ponto de Retorno” $r = r_1$ e é refletido de volta na direção de $r \rightarrow \infty$.

Se a Energia Total é negativa e encontra-se entre zero e o valor mínimo de $V(r)$, como E_2 , então o movimento é Limitado, com $r_2 \leq r \leq r_4$. Os valores de r_2 e r_4 são os Pontos de Retorno, ou as Distâncias Apsidais, da órbita.

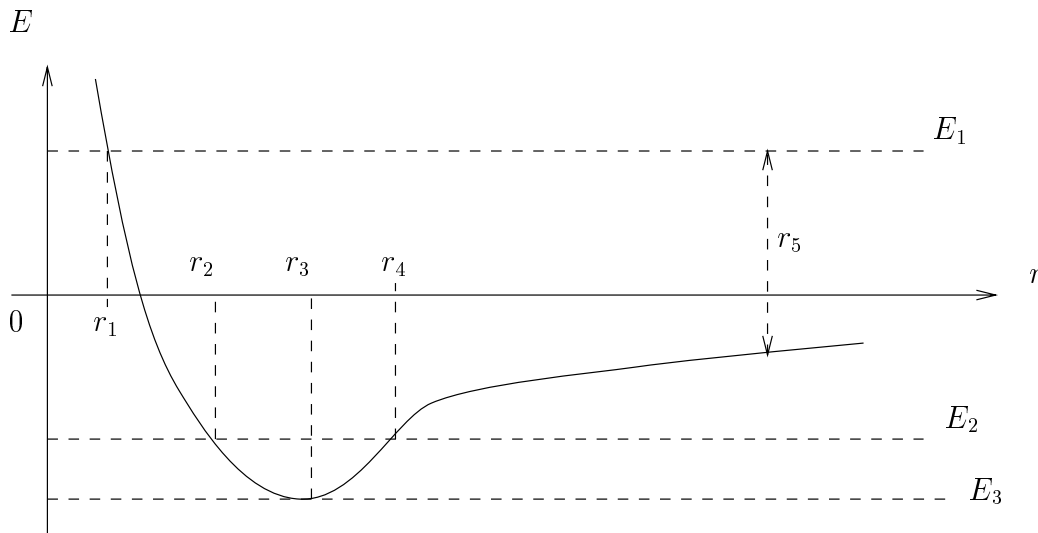


Figura 5.5: Representação da Energia Total.

Se E é igual ao valor mínimo da Energia Potencial Efetiva, isto é, $E = E_3$, então o raio do caminho da partícula é limitado pelo único valor r_3 , e então, $\dot{r} = 0$ para todos os valores do tempo; assim, o movimento é Circular.

Valores de E menores que $V_{\text{mín}} = -\frac{\mu k^2}{2l^2}$ não resultam em movimentos fisicamente reais; para tais casos $\dot{r}^2 < 0$ e a velocidade é imaginária.

Os métodos discutidos nessa seção são frequentemente usados em pesquisas atuais em campos gerais, especialmente em Física Atômica, Molecular e Nuclear.

5.7 Movimento planetário - Problema de Kepler

A Equação para a trajetória de uma partícula movendo-se sob a influência de uma Força Central cujo valor é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre a partícula e o Centro de Força pode ser obtida de,

$$\theta(r) = \pm \int \frac{\left(\frac{l}{r^2}\right) dr}{\sqrt{2\mu \left[E + \frac{k}{r} - \frac{l^2}{2\mu r^2}\right]}} + cte. \quad (5.12)$$

Escolhendo o sinal $(-)$ e fazendo $u = \frac{1}{r}$ então, $du = -\frac{1}{r^2} dr$ e, portanto, $dr = -r^2 du$.

Então,

$$\theta = \int \frac{l du}{\sqrt{2\mu [E + ku - \frac{l^2}{2\mu} u^2]}} = \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} + \frac{2\mu k}{l^2} u - u^2}}.$$

Mas,

$$\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{1/2}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \left(\frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \right),$$

onde, $a < 0$, $b^2 > 4ac$ e $(2ax + b) < \sqrt{b^2 - 4ac}$.

Logo,

$$\theta + cte = -\arcsin \frac{-\frac{2}{r} + \frac{2\mu k}{l^2}}{\sqrt{\frac{4\mu^2 k^2}{l^4} + \frac{8\mu E}{l^2}}} \implies \sin(\theta + cte) = -\frac{-\frac{2}{r} + \frac{2\mu k}{l^2}}{\sqrt{\left(\frac{2\mu k}{l^2}\right)^2 + \frac{8\mu E}{l^2}}},$$

onde $cte = \frac{\pi}{2}$, pois, quando $\theta = 0$, temos que $r = r_{\text{mín}}$.

Assim,

$$\cos \theta = \frac{\frac{l^2}{\mu k r} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2l^2 E}{\mu k^2}}}.$$

Consideremos,

$$\begin{cases} \alpha \equiv \frac{l^2}{\mu k} \\ \epsilon \equiv \sqrt{1 + \frac{2l^2 E}{\mu k^2}} \end{cases}$$

Então,

$$\cos \theta = \frac{\frac{\alpha}{r} - 1}{\epsilon},$$

$$\frac{\alpha}{r} = 1 + \epsilon \cos \theta. \quad (5.13)$$

A Equação (5.13) é a Equação de uma Secção Cônica com um foco na origem. A quantidade ϵ é chamada de Excentricidade, e 2α é denominado "Latus Rectum" da órbita.

Secções Cônicas são formadas pela intersecção de um plano e um cone.

O valor mínimo para r na Equação (5.13) ocorre quando $\theta = 0$ ou quando $\cos \theta$ é um máximo. Assim, a escolha da constante de integração na Equação (5.12) corresponde à medida de θ para $r_{\text{mín}}$ cuja posição é chamada “Pericentro”; $r_{\text{máx}}$ corresponde ao “Apo-centro”. O termo geral para Pontos de Retorno é “Apsides”. O termo correspondente para o movimento em torno do Sol são Periélio e Afélio, e para o movimento em torno da Terra, Perigeu e Apogeu.

Vários valores de excentricidade, e portanto de Energia, classificam as órbitas de acordo com diferentes Secções Cônicas.

Excentricidade	Energia	Cônica
$\epsilon > 1$	$E > 0$	Hipérbole
$\epsilon = 1$	$E = 0$	Parábola
$0 < \epsilon < 1$	$V_{\text{mín}} < E < 0$	Elipse
$\epsilon = 0$	$E = V_{\text{mín}}$	Círculo
$\epsilon < 0$	$E < V_{\text{mín}}$	Não Permitido

Para o Movimento Planetário, as órbitas são Elípticas com eixos Maior e Menor iguais a $2a$ e $2b$, respectivamente, e dados por,

$$\begin{cases} a = \frac{\alpha}{1 - \epsilon^2} = \frac{k}{2|E|} \\ b = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} = \frac{l}{\sqrt{2\mu|E|}} \end{cases} \quad (5.14)$$

Assim, o Eixo Maior depende apenas da Energia da partícula, enquanto o Eixo Menor é uma função de ambas as primeiras integrais do movimentos, isto é, l e E .

A geometria das Órbitas Elípticas em termos dos parâmetros α , ϵ , a e b é mostrada na Figura (5.6). P e P' são os Focos.

Pela Equação (5.13), temos que, $r_{\text{mín}} = \frac{\alpha}{1 + \epsilon}$ e $r_{\text{máx}} = \frac{\alpha}{1 - \epsilon}$. Para encontrar o período para o Movimento Elíptico, temos que a velocidade areal é dada por,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{l}{2\mu} \implies dt = \frac{2\mu}{l} dA \implies \int_0^\tau dt = \frac{2\mu}{l} \int_0^A dA \implies \tau = \frac{2\mu}{l} A,$$

onde, $A = \pi a b$ é a área da elipse.

Assim, usando o sistema de Equações (5.14) para determinar a área A , temos,

$$\tau = \pi k \sqrt{\frac{\mu}{2}} |E|^{-3/2}.$$

Também, pelo sistema (5.14), temos que, $b = \sqrt{\alpha a}$ e $|E| = \frac{2\mu b^2}{l^2}$.

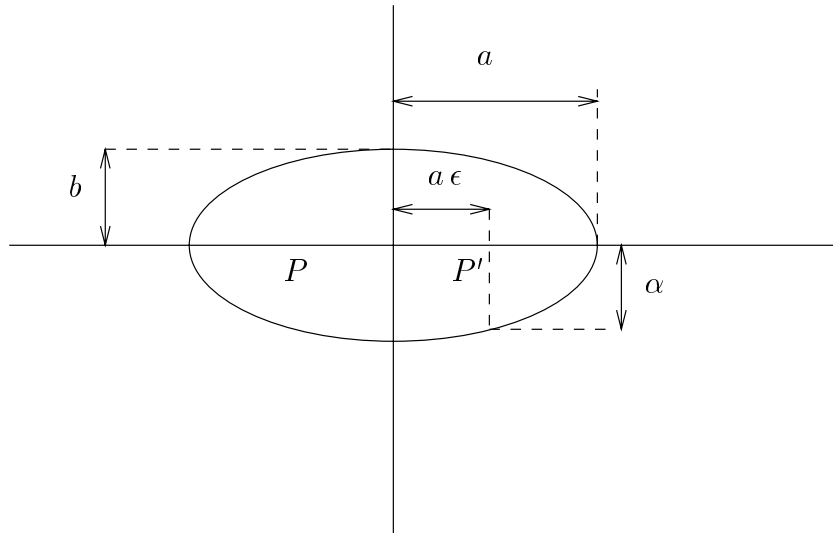


Figura 5.6: A Geometria das Órbitas Elípticas.

Logo,

$$\tau^2 = 4\pi^2 \frac{\mu^2}{l^2} \alpha a^3.$$

Porém,

$$b = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\epsilon^2}} = \frac{l}{\sqrt{2\mu|E|}} \implies \frac{\alpha^2}{l^2} = \frac{1-\epsilon^2}{2\mu|E|},$$

e,

$$a = \frac{\alpha}{1-\epsilon^2} = \frac{k}{\sqrt{2|E|}} \implies \frac{\alpha}{\mu k} = \frac{1-\epsilon^2}{2\mu|E|}.$$

Assim,

$$\frac{\alpha}{\mu k} = \frac{\alpha^2}{l^2} \implies \frac{\mu^2 \alpha}{l^2} = \frac{\mu}{k}.$$

Portanto, encontramos para o período, a expressão,

$$\tau^2 = 4\pi^2 \frac{\mu}{k} a^3. \quad (5.15)$$

Este resultado, que diz que: “O Quadrado do Período é Proporcional ao Cubo do Semi Eixo Maior da Órbita Elíptica”, é conhecido como a Terceira lei de Kepler.

Observe que este resultado está relacionado ao problema de um corpo equivalente, assim, considerações devem ser feitas do fato que é a massa reduzida, μ , que aparece na Equação

(5.15). Kepler realmente concluiu que os quadrados dos períodos dos planetas seriam proporcionais aos cubos dos eixos maiores de suas órbitas - com a mesma constante de proporcionalidade para todos os planetas. Nesse sentido, a afirmação é apenas aproximadamente correta, porque a massa reduzida é diferente para cada planeta.

Em particular, como a Força Gravitacional é dada por,

$$F(r) = -\frac{G m_1 m_2}{r^2} = -\frac{k}{r^2} \implies k = G m_1 m_2 .$$

Portanto,

$$\tau^2 = \frac{4 \pi^2 a^3 \mu}{k} = \frac{4 \pi^2 a^3}{G m_1 m_2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{4 \pi^2 a^3}{G (m_1 + m_2)} .$$

Se, $m_1 \ll m_2$, então, obtemos,

$$\tau^2 = \frac{4 \pi^2 a^3}{G m_2} ,$$

e a afirmação de Kepler é correta apenas se a massa m_i de um planeta i pode ser desprezada com relação à massa m_2 do Sol.

As Leis de Kepler podem ser resumidas da seguinte forma:

I - “*Os Planetas movem-se em Órbitas Elípticas em torno do Sol com o Sol em um dos Focos*”, ;

II - “*A área por unidade de tempo descrita por um Raio Vetor do Sol ao Planeta é constante*”, ;

III - “*O quadrado do Período do Planeta é proporcional ao Cubo do Semi Eixo Maior da Órbita do Planeta*”, .

EXEMPLO 4: O Cometa Halley, que passou em torno do Sol em 1986, move-se em uma órbita altamente elíptica com uma excentricidade $\epsilon = 0,967$ e um período de 76 anos. Calcule suas distâncias mínima e máxima.

Resolução:

Como $m_{Halley} \ll m_{Sol}$, então,

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \left(\frac{G m_{Sol} \tau^2}{4 \pi^2} \right)^{1/3} = 2,68 \cdot 10^{12} m \\ r_{\text{mín}} = a (1 + \epsilon)^{-1} \cong a (1 - \epsilon) \cong 8,8 \cdot 10^{10} m \\ r_{\text{máx}} = a (1 - \epsilon)^{-1} \cong a (1 + \epsilon) \cong 5,27 \cdot 10^{12} m \end{array} \right.$$

Lembre-se que,

$$\begin{cases} (1 + \epsilon)^{-1} = 1 - \epsilon + \epsilon^2 - \dots \\ (1 - \epsilon)^{-1} = 1 + \epsilon - \epsilon^2 - \dots \end{cases}$$

Vários valores da Excentricidade (e portanto da Energia E) classificam as órbitas para diferentes Secções Cônicas.

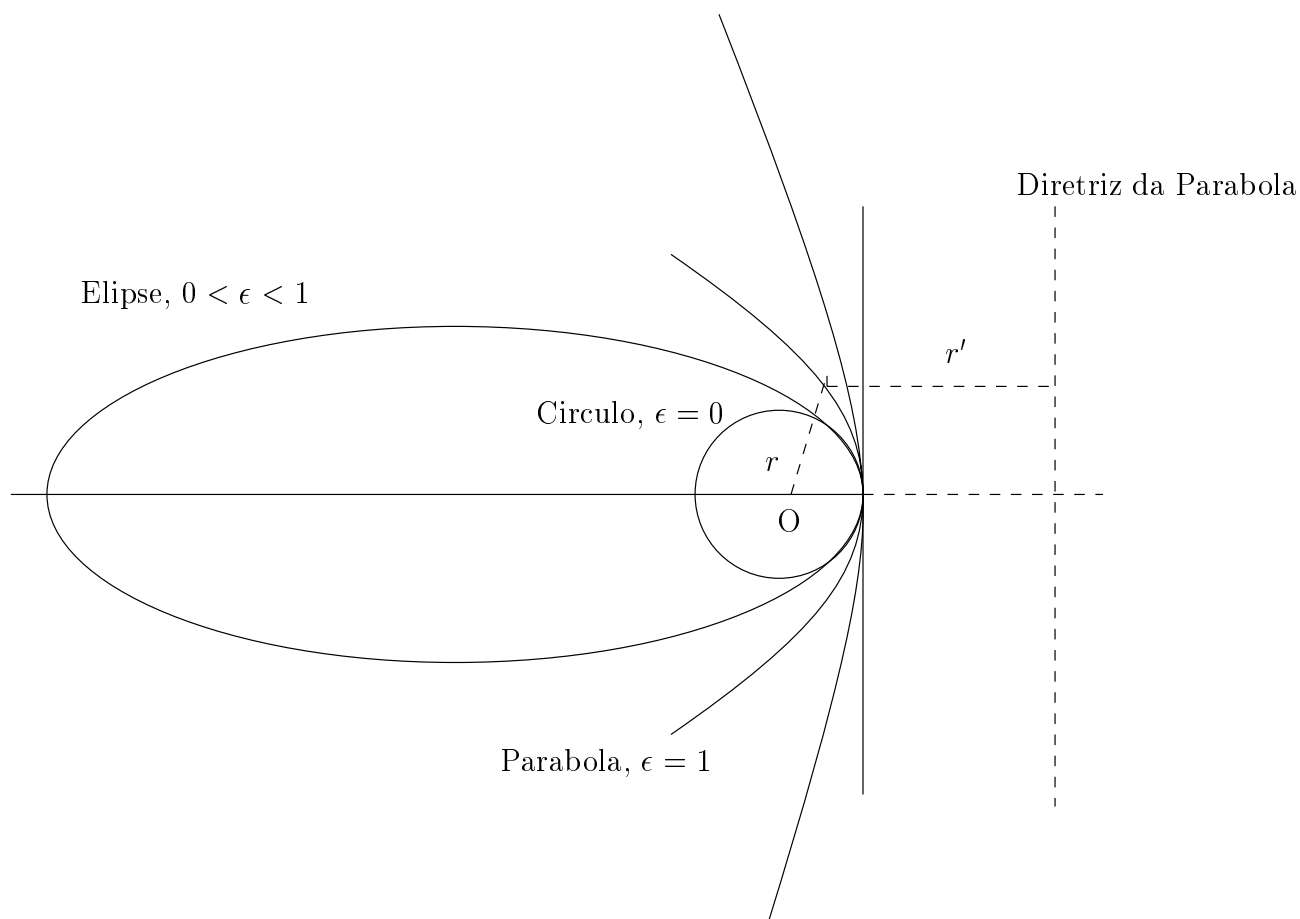


Figura 5.7: As Órbitas e as Excentricidades das Várias Secções Cônicas.

A - Para a Parábola: ($\epsilon = 1$)

Por definição,

$$\epsilon = \frac{\overline{OP}}{d} \implies \epsilon = \frac{r}{d} \implies d = \frac{r}{\epsilon}.$$

Mas,

$$\epsilon = \frac{\overline{OQ}}{D} \implies \epsilon = \frac{p}{D} \implies p = \epsilon D.$$

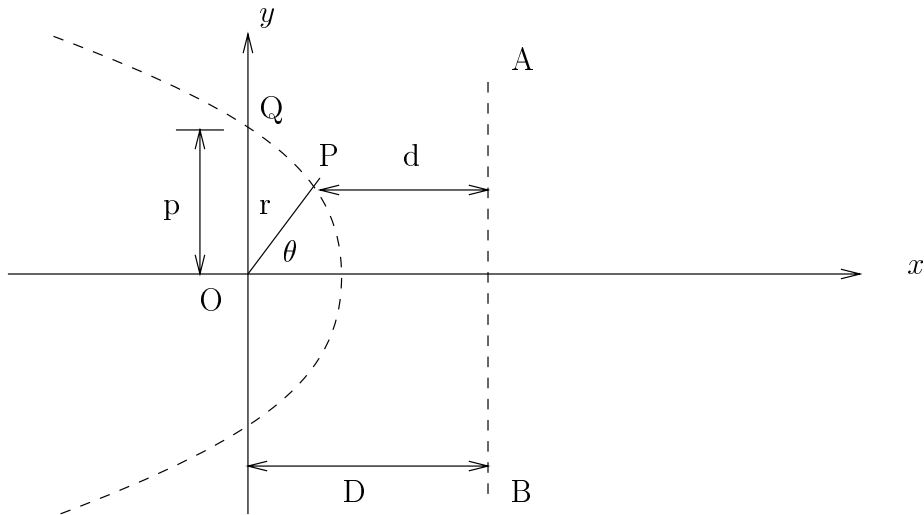


Figura 5.8: A Parábola.

Porém,

$$D = d + r \cos \theta = \frac{r}{\epsilon} + r \cos \theta \implies D = \frac{r}{\epsilon} (1 + \epsilon \cos \theta).$$

Como,

$$p = \epsilon D \implies p = \epsilon \frac{r}{\epsilon} (1 + \epsilon \cos \theta) \implies r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \theta}.$$

B - Para uma Elipse: ($0 < \epsilon < 1$)

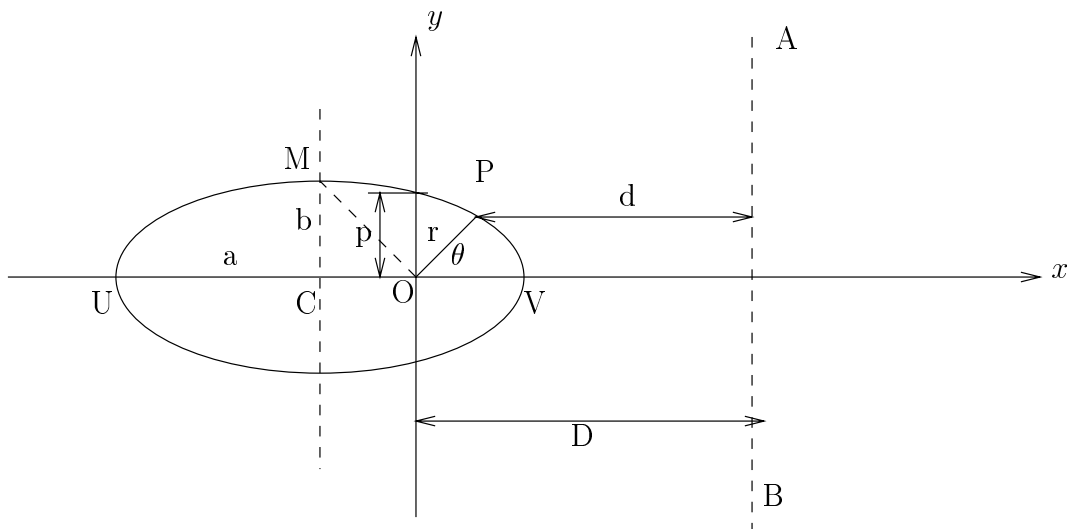


Figura 5.9: A Elipse.

Temos, de maneira análoga, que, $r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \theta}$.

Para $\theta = 0$, $r = \overline{OV}$ e assim, $\overline{OV} = \frac{p}{1 + \epsilon}$.

Para $\theta = \pi$, $r = \overline{OU}$ e assim, $\overline{OU} = \frac{p}{1 - \epsilon}$.

Mas,

$$\overline{OV} + \overline{OU} = 2a \implies \frac{p}{1 + \epsilon} + \frac{p}{1 - \epsilon} = 2a \implies p = a(1 - \epsilon^2).$$

Como,

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \theta} \implies r = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos \theta}.$$

Vamos agora calcular os valores de a e b .

1. Cálculo de a :

Temos que,

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2}.$$

Mas,

$$\frac{\alpha}{r} = 1 + \epsilon \cos \theta.$$

Então,

$$\frac{\alpha}{r_1} = 1 - \epsilon \implies r_1 = \frac{\alpha}{1 - \epsilon},$$

e,

$$\frac{\alpha}{r_2} = 1 + \epsilon \implies r_2 = \frac{\alpha}{1 + \epsilon},$$

Logo,

$$a = \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha}{1 - \epsilon} + \frac{\alpha}{1 + \epsilon} \right] \implies a = \frac{\alpha}{1 - \epsilon^2}.$$

Mas, $\alpha = \frac{l^2}{\mu k}$ e $\epsilon^2 = 1 + \frac{2l^2 E}{\mu k^2}$. Então, $a = \frac{k}{2|E|}$.

2. Cálculo de b :

Temos que,

$$\overline{OU} = \frac{p}{1 - \epsilon},$$

e,

$$p = a(1 - \epsilon^2).$$

Logo,

$$\overline{OU} = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 - \epsilon} \implies \overline{OU} = a(1 + \epsilon).$$

Como,

$$\overline{OU} = a + \overline{OC} \implies a(1 + \epsilon) = a + \overline{OC} \implies \overline{OC} = a\epsilon.$$

Por definição,

$$\epsilon = \frac{\overline{OM}}{\overline{OC} + D} \implies \epsilon = \frac{(b^2 + \overline{OC}^2)^{1/2}}{\overline{OC} + D}.$$

Porém, $p = \epsilon D$ e $p = a(1 - \epsilon^2)$, então,

$$\epsilon D = a(1 - \epsilon^2) \implies D = \frac{a}{\epsilon}(1 - \epsilon^2).$$

Portanto,

$$\epsilon = \frac{(b^2 + a^2 \epsilon^2)^{1/2}}{a\epsilon + \frac{a}{\epsilon}(1 - \epsilon^2)} \implies b = a(1 - \epsilon^2)^{1/2}.$$

Temos assim que, $a = \frac{\alpha}{1 - \epsilon^2}$ e $b = a(1 - \epsilon^2)^{1/2}$.

Logo,

$$b = \frac{\alpha}{1 - \epsilon^2} \sqrt{1 - \epsilon^2} \implies b = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}.$$

Como, $\alpha = \frac{l^2}{\mu k}$ e $\epsilon^2 = 1 + \frac{2l^2 E}{\mu k^2}$, então, $b = \frac{l}{\sqrt{2\mu|E|}}$

Portanto, $a = \frac{k}{2|E|}$ e $b = \frac{l}{\sqrt{2\mu|E|}}$.

5.8 Estabilidade de Órbitas circulares

Já vimos que a órbita é circular se a Energia Total é igual ao valor mínimo da Energia Potencial Efetiva, $E = V_{\text{mín}}$. Em geral, uma órbita circular é permitida para qualquer Potencial Atrativo, pois a Força de Atração pode ser feita de modo a balancear a Força Centrífuga pela escolha apropriada da velocidade radial.

Embora órbitas circulares sejam sempre possíveis em um Campo de Força Atrativo Central, tais órbitas não são necessariamente estáveis. Uma órbita circular para $r = \rho$ existe se, para qualquer t ,

$$\dot{r}|_{r=\rho} = 0.$$

Isto é possível se,

$$\left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=\rho} = 0.$$

Mas, apenas se o Potencial Efetivo tem um mínimo verdadeiro, resulta estabilidade. Todas as outras órbitas circulares de equilíbrio são Instáveis.

Vamos considerar uma Força Atrativa Central com a forma, $F(r) = -\frac{k}{r^n}$. O Potencial para uma tal Força é,

$$U(r) = - \int F dr = \int k \frac{dr}{r^n} \implies U(r) = -\frac{k}{n-1} \frac{1}{r^{n-1}},$$

e, a Função Potencial Efetivo é,

$$V(r) = -\frac{k}{n-1} \frac{1}{r^{n-1}} + \frac{l^2}{2\mu r^2}.$$

As condições para um mínimo de $V(r)$ e, portanto, para uma órbita Circular Estável com um raio ρ são, $\left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=\rho} = 0$ e $\left. \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right|_{r=\rho} > 0$.

Temos que,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_1}{\partial r} = -\frac{k}{n-1} \frac{\partial}{\partial r} r^{-(n-1)} = \frac{k}{r^n} \\ \frac{\partial V_2}{\partial r} = \frac{l^2}{2\mu} \frac{\partial}{\partial r} r^{-2} = -\frac{l^2}{\mu} \frac{1}{r^3} \end{array} \right.$$

Logo,

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{k}{r^n} - \frac{l^2}{\mu} \frac{1}{r^3} \implies \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=\rho} = \frac{k}{\rho^n} - \frac{l^2}{\mu} \frac{1}{\rho^3} = 0 \implies \rho^{(n-3)} = \frac{k\mu}{l^2},$$

e,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(k r^{-n} - \frac{l^2}{\mu} r^{-3} \right) = -\frac{n k}{r^{n+1}} + \frac{3 l^2}{\mu r^4} \implies \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \Big|_{r=\rho} = -\frac{n k}{\rho^{n+1}} + \frac{3 l^2}{\mu \rho^4} > 0$$

Mas, $\rho^{n-3} = \frac{k \mu}{l^2}$. Logo, $n < 3$.

Assim, a condição para que uma órbita circular Estável exista é que, $n < 3$.

Aplicaremos agora um procedimento mais geral e investigaremos a frequência do oscilador sobre uma órbita circular em um Campo de Força Geral.

Seja a Força dada por, $F(r) = -\mu g(r) = -\frac{\partial U}{\partial r}$. Mas,

$$L = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - U(r),$$

e,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial r} = \mu r \dot{\theta}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \mu \dot{r} \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \mu \ddot{r} \end{array} \right.$$

Usando as equações de Lagrange, temos que,

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 0 \implies \mu (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) + \overbrace{\frac{\partial U}{\partial r}}^{=-F(r)=-\mu g(r)} \implies \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 = -g(r).$$

Mas,

$$l = \mu r^2 \dot{\theta} = cte \implies \dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2}.$$

Logo,

$$\ddot{r} - \frac{l^2}{\mu^2 r^3} = -g(r).$$

Considerando que a partícula está inicialmente em uma órbita circular com raio ρ e aplicando uma perturbação de forma que $r \rightarrow \rho + x$, onde x é pequena, temos que, como ρ é constante, $\ddot{r} \rightarrow \ddot{x}$.

Logo,

$$\ddot{x} - \frac{l^2}{\mu^2 (\rho + x)^3} = -g(\rho + x) \implies \ddot{x} - \frac{l^2}{\mu^2 \rho^3 (1 + \frac{x}{\rho})^3} = -g(\rho + x).$$

Como,

$$\frac{x}{\rho} \ll 1 \implies (1 + \frac{x}{\rho})^{-3} = 1 - 3 \frac{x}{\rho} + \dots$$

Expandindo $g(r) = g(\rho + x)$ numa Série de Taylor em torno do ponto $r = \rho$, isto é,

$$g(\rho + x) = g(\rho) + x g'(\rho) + \dots,$$

onde,

$$g'(\rho) = \left. \frac{dg}{dr} \right|_{r=\rho}.$$

Desprezando todos os termos de ordem ≥ 2 em x , obtemos,

$$\ddot{x} - \frac{l^2}{\mu^2 \rho^3} (1 - \frac{3x}{\rho}) \cong -\left(g(\rho) + x g'(\rho)\right).$$

Mas, assumimos que a partícula está inicialmente numa órbita circular com $r = \rho$. Sob tais condições, $\dot{r}|_{r=\rho} = 0$ e $\ddot{r}|_{r=\rho} = 0$, então, de $\ddot{r} - \frac{l^2}{\mu^2 r^3} = -g(r)$, temos,

$$-\frac{l^2}{\mu^2 \rho^3} = -g(\rho) \implies g(\rho) = \frac{l^2}{\mu^2 \rho^3}.$$

Assim,

$$\ddot{x} - g(\rho) (1 - \frac{3x}{\rho}) \cong -\left(g(\rho) + x g'(\rho)\right) \implies \ddot{x} + \left(\frac{3g(\rho)}{\rho} + g'(\rho)\right) x \cong 0.$$

Seja, $\omega_o^2 = \frac{3g(\rho)}{\rho} + g'(\rho)$. Então,

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0.$$

A solução desta equação é,

$$x = A e^{i\omega_o t} + B e^{-i\omega_o t}.$$

Se $\omega_o^2 < 0$, então o termo, $B e^{-i\omega_o t}$ se transforma em $B e^{|\omega_o| t}$ que aumenta sem limite quando o tempo aumenta. Assim, a condição para oscilação é portanto, que $\omega_o > 0$, isto é,

$$\frac{3g(\rho)}{\rho} + g'(\rho) > 0 \implies \frac{g'(\rho)}{g(\rho)} + \frac{3}{\rho} > 0.$$

Mas,

$$\frac{g'(\rho)}{g(\rho)} = \frac{F'(\rho)}{F(\rho)}.$$

Logo,

$$\frac{F'(\rho)}{F(\rho)} + \frac{3}{\rho} > 0.$$

Porém, para,

$$F(r) = -\frac{k}{r^n} \implies F'(\rho) = \frac{nk}{r^{n+1}},$$

e, então,

$$\frac{F'(\rho)}{F(\rho)} = \frac{-n}{\rho}.$$

Portanto, $\frac{-n}{\rho} + \frac{3}{\rho} > 0$, e, portanto, $n < 3$, e chegamos às mesmas condições de antes.

EXEMPLO 5: Investigue a estabilidade das órbitas circulares em um Campo de Força descrito pela Função Potencial

$$U(r) = -\frac{k}{r} e^{-\frac{r}{a}},$$

onde, $k > 0$ e $a > 0$, são constantes.

Resolução:

$$F(r) = -\frac{\partial U}{\partial r} = k \left[-\frac{1}{ar} e^{-\frac{r}{a}} - \frac{1}{r^2} e^{-\frac{r}{a}} \right] \implies F(r) = -k \left(\frac{1}{ar} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-\frac{r}{a}},$$

e,

$$\frac{\partial F}{\partial r} = k \left(\frac{2}{ar^2} + \frac{1}{a^2 r} + \frac{2}{r^3} \right) e^{-\frac{r}{a}}.$$

A Condição de Estabilidade é,

$$\frac{F'(\rho)}{F(\rho)} + \frac{3}{\rho} > 0.$$

Então,

$$\frac{a^2}{\rho^2} + \frac{a}{\rho} - 1 > 0.$$

Seja $q = \frac{a}{\rho}$. Então,

$$q^2 + q - 1 > 0,$$

que apresenta duas soluções, $q_1 \cong 0,62$ e $q_2 \cong -1,62$. A segunda solução não tem significado físico já que a quantidade q é razão entre duas grandezas positivas. Portanto, a solução possível é q_1 .

Então, se o Momento Angular e a Energia permitem uma órbita circular para $r = \rho$, o movimento é Estável se, $a/\rho \geq 0,62$, ou seja, $\rho \leq 1,62a$.

Para $\rho/a < 1,62$, o mínimo verdadeiro existe para o Potencial indicando que a órbita Circular é Estável com relação à pequenas oscilações.

Para $\rho/a > 1,62$, não existe mínimo. Assim, órbitas circulares não podem existir.

Para $\rho/a = 1,62$, o Potencial tem inclinação zero na posição que uma órbita circular ocorrerá. A órbita é Instável nesta posição, porque $\omega_o = 0$, assim,

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0 \implies \ddot{x} = 0 \implies \dot{x} = a \implies x = at + b,$$

isto é, o deslocamento x aumenta linearmente com o tempo.

EXEMPLO 6: Determine se uma partícula movendo-se sobre a superfície de um cone pode ter uma órbita Circular Estável.

Resolução: Temos que, $z = r \cot \alpha$ e, em Coordenadas Cilíndricas,

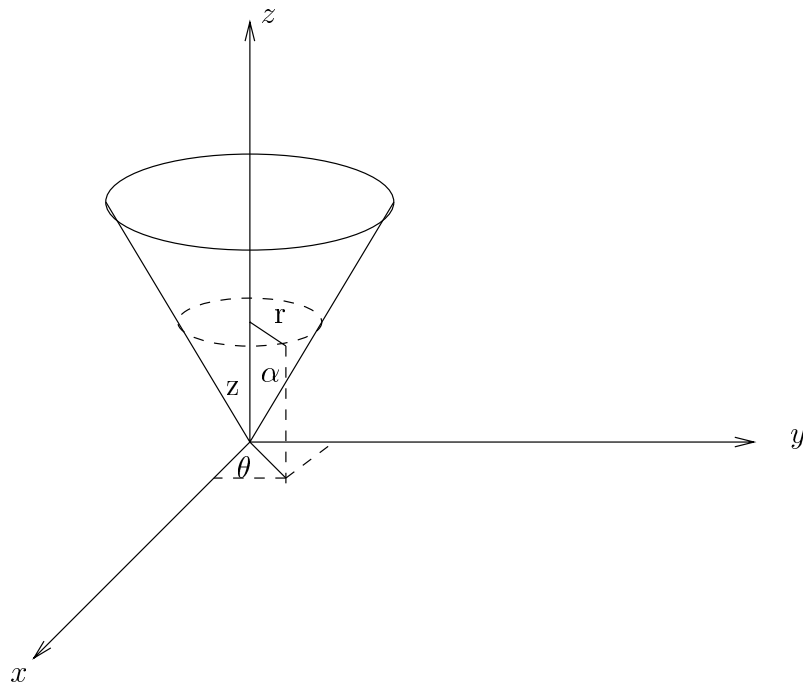


Figura 5.10: Exemplo 6.

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 = r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 \csc^2 \alpha ,$$

e, assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} T = \frac{1}{2} m (r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 \csc^2 \alpha) \\ U = m g z \implies U = m g r \cot \alpha \\ L = T - U \implies L = \frac{1}{2} m (r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 \csc^2 \alpha) - m g r \cot \alpha \end{array} \right.$$

Para a coordenada θ , temos,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \implies m r^2 \dot{\theta} = l = cte \end{array} \right.$$

e, para a coordenada r , temos,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot{\theta}^2 - m g \cot \alpha \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \csc^2 \alpha \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \ddot{r} \csc^2 \alpha \end{array} \right.$$

Aplicando a Equação de Lagrange para a coordenada r , obtemos,

$$\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha + g \sin \alpha \cos \alpha = 0 \quad (5.16)$$

Assumindo que uma órbita Circular existe para $r = \rho$, então, aplicando uma perturbação $r \rightarrow \rho + x$, com $x \ll \rho$, temos que,

$$r \dot{\theta}^2 = r \frac{l^2}{m^2 r^4} = \frac{l^2}{m^2 r^3} = \frac{l^2}{m^2} \frac{1}{(\rho + x)^3} = \frac{l^2}{m^2} (\rho + x)^{-3} = \frac{l^2}{m^2 \rho^3} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^{-3} \cong \frac{l^2}{m^2 \rho^3} \left(1 - \frac{3x}{\rho}\right).$$

Assim, substituindo em (5.16), temos,

$$\ddot{x} - \frac{l^2}{m^2 \rho^3} \left(1 - \frac{3x}{\rho}\right) \sin^2 \alpha + g \sin \alpha \cos \alpha = 0 ,$$

e assim,

$$\ddot{x} + \frac{3 l^2 \sin^2 \alpha}{m^2 \rho^4} x - \frac{l^2}{m^2 \rho^3} \sin^2 \alpha + g \sin \alpha \cos \alpha = 0 \quad (5.17)$$

Para $r = \rho$, temos que, $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. Então, a Equação (5.16), torna-se,

$$-\frac{l^2}{m^2 \rho^3} \sin^2 \alpha + g \sin \alpha \cos \alpha = 0 \implies \frac{l^2}{m^2 \rho^3} \sin^2 \alpha = g \sin \alpha \cos \alpha ,$$

que, substituindo na Equação (5.17), fica,

$$\ddot{x} + \frac{l^2}{m^2 \rho^4} \sin^2 \alpha x - g \sin \alpha \cos \alpha + g \sin \alpha \cos \alpha = 0 \implies \ddot{x} + \left(\frac{3l^2}{m^2 \rho^4} \sin^2 \alpha \right) x = 0$$

A solução para esta Equação é a de um oscilador harmônico com frequência ω , onde,

$$\omega = \frac{\sqrt{3}l}{m \rho^2} \sin \alpha > 0 .$$

Assim, a órbita Circular é Estável.

5.9 Problemas Propostos

01) Duas partículas movendo-se sob a influência de suas forças gravitacionais mútuas descrevem órbitas circulares em torno uma da outra com um período τ . Elas são subitamente paradas em suas órbitas e permitidas por gravidade a dirigir-se uma ao encontro da outra. Mostre que elas colidirão após um tempo $\frac{\tau}{4\sqrt{2}}$.

02) Investigue o movimento de uma partícula repelida por uma Força Central de acordo com a lei $F(r) = k r$. Mostre que a órbita só pode ser hiperbólica.

03) Uma partícula move-se sob a influência de uma Força Central dada por $F(r) = -\frac{k}{r^n}$. Se a órbita da partícula é Circular e passa através do Centro de Força, mostre que $n = 5$.

04) Encontre a Lei de Força para um Campo de Força Central que permite uma partícula mover-se em uma órbita espiral dada por $r = k\theta^2$, onde k é uma constante positiva.

05) Uma partícula de massa unitária move-se do infinito ao longo de uma linha reta que, se continuada, permitirá a ela passar a uma distância $b\sqrt{2}$ de um ponto P . Se a partícula é atraída para o ponto P com uma Força variando como $\frac{k}{r^5}$, e se o Momento Angular em torno do ponto P é $\frac{\sqrt{k}}{b}$, mostre que a trajetória é dada por $r = b \coth \frac{\theta}{\sqrt{2}}$.

06) Uma partícula executa movimento elíptico (mas quase circular) em torno de um Centro de Força. Em algum ponto na órbita um impulso tangencial é aplicado à partícula, variando a velocidade de v para $v + \delta v$. Mostre que a variação relativa resultante no eixo maior da órbita é duas vezes a variação relativa na velocidade e que os eixos são aumentados de $\delta v > 0$.

07) Para uma partícula movendo-se numa órbita com Semi Eixo Maior a e excentricidade ϵ , mostre que:

$$\left\langle (a/r)^4 \cos \theta \right\rangle = \frac{\epsilon}{(1 - \epsilon^2)^{5/2}} ,$$

onde o símbolo $\langle \rangle$ representa uma média temporal sobre um período completo.

6

Gravitação

6.1 Introdução

Em 1666, Newton teve formulada, e numericamente comprovada, a Lei da Gravitação que ele publicaria em seu livro “Principia” em 1687. Ele esperou mais de 20 anos para publicar seu resultado porque não podia justificar seu método de cálculo numérico em que considerava a Terra e a Lua como massas pontuais. Assim, Newton encontrou dificuldades em provar o problema da interação entre dois corpos pois ainda não tinha desenvolvido o cálculo necessário para a comprovação matemática das suas idéias.

A lei de Newton da Gravitação Universal diz que “*cada partícula de massa M atrai outra partícula de massa m no universo com uma força que varia diretamente com o produto das duas massas e inversamente com o quadrado da distância entre elas*”.

Na forma matemática, escrevemos a lei como

$$\vec{F} = -\frac{G M m}{r^2} \hat{e}_r \quad (6.1)$$

onde a uma distância r de uma partícula de massa M , uma segunda partícula de massa m experimenta uma força atrativa como mostra a Figura (6.1). O vetor unitário \hat{e}_r aponta de M para m , e o sinal negativo indica que a força é atrativa - isto é, m é atraída por M .

Uma verificação experimental da lei e uma determinação do valor de G foi feita em 1798 pelo físico inglês Henry Cavendish (1731 - 1810).

O experimento de Cavendish, descrito em muitos textos de física elementar, usou uma balança de torção com duas pequenas esferas fixas nas extremidades de uma haste leve. As duas esferas foram atraídas por duas outras esferas que podiam ser colocadas em ambos os lados das esferas menores. O melhor valor para a constante G que tem sido obtido até agora é $(6,6726 \pm 0,0008) \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 / kg^2$. O interessante é que, embora G seja talvez a constante mais antiga conhecida, a sabemos com menor precisão que a maioria das constantes fundamentais modernas tais como e , c e \hbar .

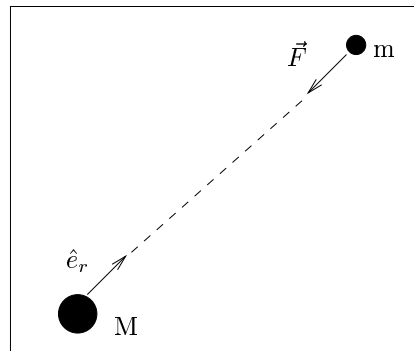


Figura 6.1: Força de Atração Gravitacional.

Na forma da Equação (6.1), a lei aplica-se estritamente à partículas pontuais. Se uma das partículas, ou ambas, forem substituídas por um corpo com uma certa extensão, devemos fazer uma hipótese antes de podermos calcular a força. Devemos considerar que o campo de força gravitacional é um CAMPO LINEAR. Em outras palavras, supomos que é possível calcular a força gravitacional total sobre uma partícula devido a muitas outras partículas, simplesmente tomando o vetor soma de todas as forças individuais. Para um dos corpos consistindo de uma distribuição contínua de matéria, a soma torna-se uma integral, conforme ilustra a Figura (6.2),

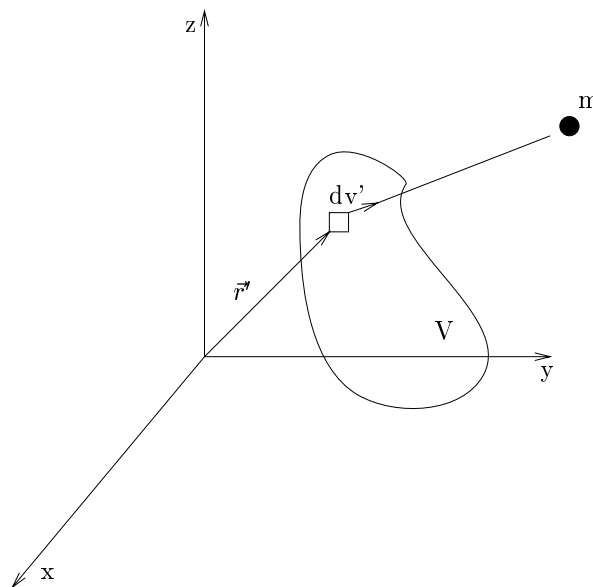


Figura 6.2: Força de Atração Gravitacional.

$$\vec{F} = -G m \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{r^2} \hat{e}_r dv' \quad (6.2)$$

onde $\rho(\vec{r}')$ é a densidade de massa e dv' é o elemento de volume da posição definida pelo vetor \vec{r}' da origem (arbitrária) ao ponto na distribuição de massa.

Se ambos os corpos, o de massa M e o de massa m tem uma extensão finita, uma segunda integração sobre o volume de m será necessária para computar a força gravitacional total.

O vetor campo gravitacional \vec{g} é o vetor representante da força por unidade de massa, exercida sobre uma partícula no campo de um corpo de massa M . Assim,

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{GM}{r^2} \hat{e}_r \quad (6.3)$$

ou,

$$\vec{g} = -G \int_V \frac{\rho(\vec{r}') \hat{e}_r}{r^2} dv' \quad (6.4)$$

Observe que a direção de \hat{e}_r varia com r' (veja a Figura (6.2))

A quantidade \vec{g} tem a dimensão de força por unidade de massa, também igual a aceleração. De fato, próximo à superfície da Terra, a magnitude de \vec{g} é exatamente a quantidade que chamamos de ACELERAÇÃO DA GRAVIDADE. Medidas com um pêndulo simples (ou alguma variação mais sofisticada) são suficientes para mostrar que $|\vec{g}|$ é, aproximadamente, $9,80m/s^2$ ou $9,80 N/kg$ na superfície da Terra.

6.2 Potencial Gravitacional

O vetor campo gravitacional \vec{g} varia com $1/r^2$ e portanto satisfaz a condição que permite que \vec{g} seja representado como o gradiente de uma função escalar. Portanto, podemos escrever

$$\vec{g} = -\nabla\Phi \quad (6.5)$$

onde Φ é chamado o POTENCIAL GRAVITACIONAL e tem dimensões de (Força por unidade de massa) x (distância), ou energia por unidade de massa.

Porque \vec{g} tem apenas uma variação radial, o potencial Φ pode ter, quando muito, uma variação com r . Portanto, usando a Equação (6.3) para \vec{g} , temos

$$\nabla\Phi = \frac{d\phi}{dr} \hat{e}_r = \frac{GM}{r^2} \hat{e}_r$$

Integrando, obtemos,

$$\Phi = -\frac{GM}{r} \quad (6.6)$$

A constante de integração foi suprimida, porque o potencial é indeterminado a menos de uma constante aditiva: isto é, apenas diferenças de potencial são significativos, não valores particulares. Geralmente removemos a ambiguidade no valor do potencial arbitrando que $\Phi \rightarrow 0$, quando $r \rightarrow \infty$; então a Equação (6.6) fornece corretamente o potencial para essa condição.

O potencial devido a uma distribuição contínua de matéria é dado por,

$$\Phi = -G \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{r} dv' \quad (6.7)$$

Analogamente, se a massa está distribuída apenas sobre uma fina casca (isto é, uma distribuição superficial), então

$$\Phi = -G \int_S \frac{\rho_s}{r} da' \quad (6.8)$$

onde ρ_s é a densidade superficial de massa ou densidade areal de massa e da' é o elemento de área. Finalmente, se existe uma fonte de linha com densidade linear, ρ_l , então

$$\Phi = -G \int_C \frac{\rho_l}{r} ds' \quad (6.9)$$

sendo ds' o elemento de comprimento.

O significado físico da função Potencial Gravitacional torna-se claro se considerarmos o trabalho por unidade de massa, dW' , que deve ser feito por um agente externo sobre um corpo num campo gravitacional para deslocar o corpo uma distância $d\vec{r}$. Nesse caso, o trabalho é igual ao produto escalar do vetor força e o vetor deslocamento. Assim, para o trabalho feito sobre o corpo por unidade de massa, temos

$$\frac{d\tau}{dm} = dW' = -\vec{g} \bullet d\vec{r} = \nabla\Phi \bullet d\vec{r} = \sum_i \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} dx_i = d\Phi \quad (6.10)$$

porque Φ é uma função apenas das coordenadas do ponto para o qual é medida: $\Phi = \Phi(x_1, x_2, x_3) = \Phi(x_i)$. Portanto a quantidade de trabalho por unidade de massa que deve ser feito sobre um corpo para movê-lo de uma posição para outra num campo gravitacional é igual à diferença do potencial entre os dois pontos.

Se a posição final é mais distante da fonte de massa M que a posição inicial, trabalho tem sido feito sobre a massa unitária. Como as posições dos dois pontos são arbitrárias, podemos tomar uma delas estando no infinito. Se definirmos o potencial como zero no infinito, podemos interpretar Φ em qualquer ponto como sendo o trabalho por unidade de massa necessário para trazer o corpo do infinito até aquele ponto. A Energia Potencial é igual à massa do corpo multiplicada pelo potencial Φ . Se U é sua Energia Potencial, então

$$U = m\Phi \quad (6.11)$$

e a força sobre o corpo é dada pelo negativo do gradiente da Energia Potencial daquele corpo, isto é,

$$\vec{F} = -\nabla U \quad (6.12)$$

que é exatamente a expressão que já conhecemos, válida quando o campo de força é conservativo.

Notemos que ambos, o Potencial e a Energia Potencial, aumentam quando o trabalho é feito sobre o corpo. O Potencial, de acordo com nossa definição, é sempre negativo e só aproxima-se do seu valor máximo, isto é, zero, quando $r \rightarrow \infty$.

Uma certa Energia Potencial existe sempre que um corpo é colocado no campo gravitacional de uma massa fonte. Essa Energia Potencial reside no campo, mas é comum sob essas circunstâncias, falar da Energia Potencial “do corpo”. Manteremos essa prática nesse texto. Devemos também considerar a massa fonte tendo uma Energia Potencial Intrínseca. Essa Energia Potencial é igual à Energia Gravitacional liberada quando o corpo foi formado, ou seja, é igual à energia que deve ser fornecida (isto é, o trabalho que deve ser feito) para dispersar a massa sobre a esfera até o infinito. Por exemplo, quando gás interestelar se condensa para formar uma esfera, a Energia Gravitacional liberada vem, em grande parte, do aquecimento inicial da esfera. Como a temperatura cresce, a energia é irradiada (emitida ou lançada) para fora, como Radiação Eletromagnética. Em todos os problemas tratados, a

estrutura dos corpos é mantida invariável durante o processo estudado. Assim, não existe nenhuma variação na Energia Potencial, e deve ser desprezada para o propósito de qualquer que sejam os cálculos que estivermos fazendo.

EXEMPLO 1: Qual é o Potencial Gravitacional em pontos internos e em pontos externos de uma casca esférica de raio interno a e raio externo b ?

Resolução:

Um dos mais importantes problemas da teoria gravitacional diz respeito ao cálculo da força gravitacional devido a uma esfera homogênea. Esse problema é um caso especial do cálculo mais geral para uma casca esférica homogênea. Uma solução para o problema da casca pode ser obtida calculando diretamente a força sobre um objeto arbitrário de massa unitária trazida para o campo mas, é mais fácil usar o Método do Potencial.

Consideremos a casca mostrada na Figura (6.3) e calculemos o potencial em um ponto

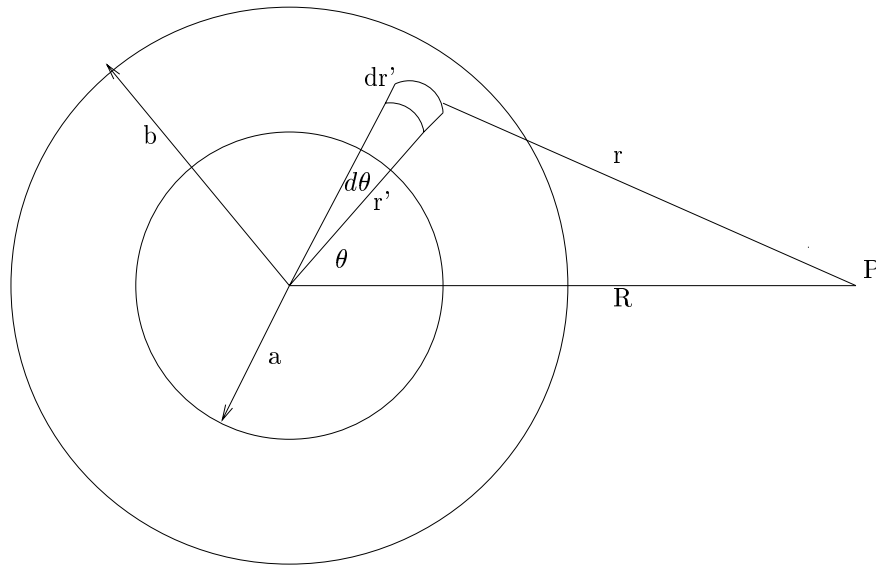


Figura 6.3: Exemplo 1 - Força gravitacional devida a uma casca esférica.

P a uma distância R do centro da casca. Como o problema tem simetria em torno da linha conectando o centro da esfera e o ponto no campo P , o ângulo azimutal ϕ não é mostrado na Figura (6.3) e podemos imediatamente integrar sobre $d\phi$ na expressão para o potencial.

Como, $dv' = r'^2 \sin \theta dr' d\theta d\phi$ então,

$$\Phi = -G \int_V \frac{\rho(r')}{r} dv' = -2\pi \rho G \int_b^a r'^2 dr' \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{r} d\theta \quad (6.13)$$

onde assumimos uma distribuição homogênea de massa para a casca esférica, $\rho(r') = \rho$.

De acordo com a lei dos cossenos,

$$r^2 = r'^2 + R^2 - 2r'R \cos \theta \quad (6.14)$$

Como R é uma constante, para um dado r' , podemos diferenciar essa equação e obter,

$$2r dr = 2r'R \sin \theta d\theta \implies \frac{\sin \theta}{r} d\theta = \frac{dr}{r'R} \quad (6.15)$$

Substituindo essa expressão na Equação (6.14), temos

$$\Phi = -\frac{2\pi \rho G}{R} \int_b^a r' dr' \int_{r_{min}}^{r_{max}} dr \quad (6.16)$$

Os limites da integração sobre dr depende da localização do ponto P . Se P é externo à casca, então

$$\Phi(R > a) = -\frac{2\pi \rho G}{R} \int_b^a r' dr' \int_{R-r'}^{R+r'} dr = -\frac{2\pi \rho G}{R} \int_b^a r' dr' [r] \Big|_{R-r'}^{R+r'}$$

$$\Phi(R > a) = -\frac{2\pi \rho G}{R} \int_b^a (R+r' - R+r') r' dr' = -\frac{4\pi \rho G}{R} \int_b^a r'^2 dr' = -\frac{4\pi \rho G}{R} \frac{r'^3}{3} \Big|_b^a$$

assim,

$$\Phi(R > a) = -\frac{4\pi \rho G}{3R} (a^3 - b^3) \quad (6.17)$$

Mas, a massa M da casca é dada por $M = \frac{4\pi \rho}{3} (a^3 - b^3)$. Portanto, o potencial é

$$\Phi(R > a) = -\frac{GM}{R} \quad (6.18)$$

Se o ponto do campo encontra-se no interior da casca, então

$$\Phi(R < b) = -\frac{2\pi \rho G}{R} \int_b^a r' dr' \int_{r'-R}^{r'+R} dr = -\frac{2\pi \rho G}{R} \int_b^a r' dr' [r] \Big|_{r'-R}^{r'+R}$$

$$= -4\pi \rho G \int_b^a r' dr' = -4\pi \rho G \frac{r'^2}{2} \Big|_b^a$$

$$\Phi(R < b) = -2\pi \rho G (a^2 - b^2) \quad (6.19)$$

O potencial é portanto constante e independe da posição dentro da casca.

Finalmente, se quisermos calcular o potencial para pontos na casca, precisamos apenas substituir o limite inferior da integração na expressão para $\Phi(R < b)$ pela variável R , substituir o limite superior da integração na expressão para $\Phi(R > a)$ por R , e adicionar os resultados. Assim, encontramos

$$\Phi(b < R < a) = -\frac{4\pi \rho G}{3R} (R^3 - b^3) - 2\pi \rho G (a^2 - R^2)$$

e então,

$$\Phi(b < R < a) = -4\pi \rho G \left(\frac{a^2}{2} - \frac{b^3}{3R} - \frac{R^2}{6} \right) \quad (6.20)$$

Observamos que se $R \rightarrow a$, então a Equação (6.20) fornece o mesmo resultado da Equação (6.18). Analogamente, as Equações (6.20) e (6.19) produzem o mesmo resultado para o limite $R \rightarrow b$. O potencial é portanto CONTÍNUO. Se o potencial não fosse contínuo em algum ponto, o gradiente do potencial - e por consequência, a força - seria infinita nesse ponto. Como forças infinitas não representam realidade física, conclue-se que funções potenciais realísticas devem sempre ser contínuas.

Observe que tratamos a massa da casca como homogênea. De modo a realizar cálculos para um corpo sólido, massivo como um planeta que tem uma distribuição de massa esférica, podemos adicionar um grande número de cascas ou, se escolhermos, podemos considerar a densidade variando como uma função do raio.

Os resultados do exemplo 1 são muito importantes. A Equação (6.18) diz que o potencial para qualquer ponto fora da distribuição esfericamente simétrica de matéria (casca sólida, pois sólidos são compostos de muitas cascas) é independente do tamanho da distribuição. Portanto, para calcular o potencial externo (ou a força), consideramos toda a massa estando concentrada no centro. A Equação (6.19) indica que o potencial é constante (e a força é zero) em qualquer parte interna de uma casca de massa esfericamente simétrica. E, finalmente, para pontos dentro da casca, o potencial dado pela Equação (6.20) é consistente com ambos os resultados anteriores.

A magnitude do vetor campo \vec{g} pode ser calculada a partir de Φ , como $g = -\frac{d\Phi}{dR}$ para cada uma das três regiões. Os resultados são

$$\begin{cases} g(R < b) = 0 \\ g(b < R < a) = \frac{4\pi\rho G}{3} \left(\frac{b^3}{R^2} - R \right) \\ g(R > a) = -\frac{GM}{R^2} \end{cases} \quad (6.21)$$

Observamos que, não só o potencial, mas também o vetor campo (e conseqüentemente, a força) são contínuos. A derivada do vetor campo, contudo, não é contínua através das superfícies interna e externa da casca.

Todos esses resultados para o potencial e o vetor campo podem ser resumidos como mostra a Figura (6.4)

EXEMPLO 2: Considere um anel uniforme de raio a e massa M . Uma massa m é colocada no plano do anel. Encontre a posição de equilíbrio e determine se é estável.

Resolução:

Da simetria do problema, deveríamos acreditar que a massa m colocada no centro do anel conforme mostra a Figura (6.5) estaria em equilíbrio pois se encontraria cercada uniformemente pela massa.

Coloquemos a massa m a uma distância r' do centro do anel, e escolhamos o eixo x ao longo dessa direção.

Temos que $dM = \rho dl$ e $dl = a d\phi$. Então,

$$dM = \rho a d\phi \quad (6.22)$$

O potencial é dado pela Equação (6.7), ou seja,

$$d\Phi = -G \frac{dM}{b} = -G \frac{\rho a d\phi}{b} \quad (6.23)$$

onde $\rho = \frac{M}{2\pi a}$.

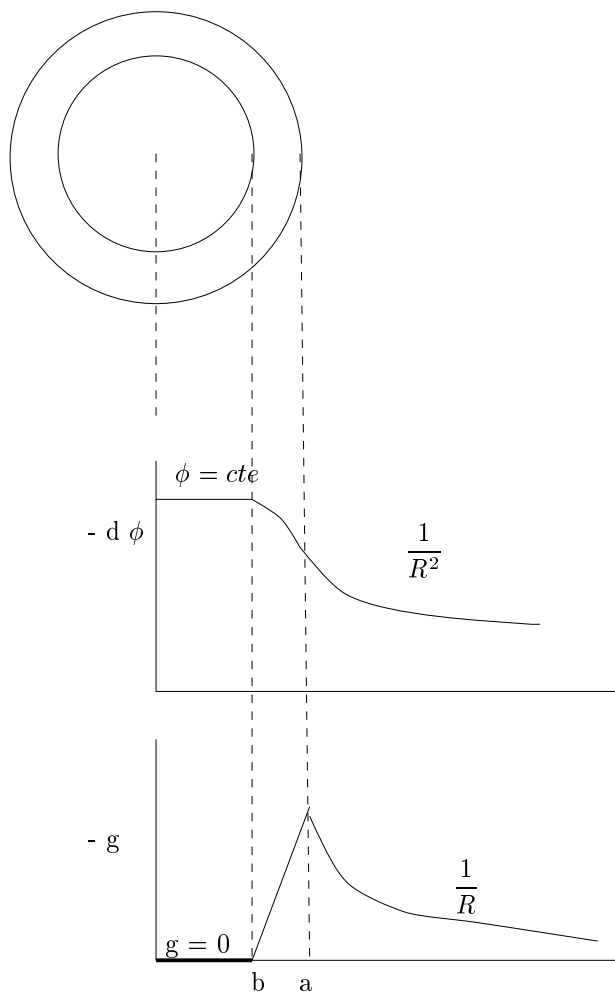


Figura 6.4: Potencial e Campo Gravitacionais de uma casca esférica.

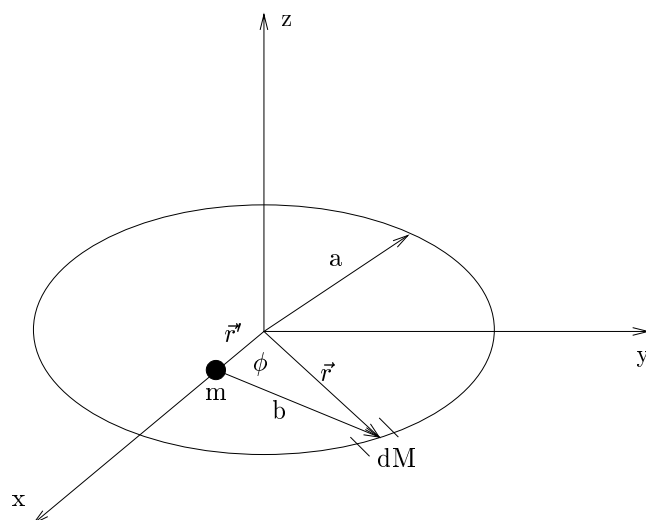


Figura 6.5: Exemplo 2 - Potencial e Campo Gravitacionais de um anel uniforme.

Mas, $b = |\vec{r}' - \vec{r}''|$ e,

$$\begin{cases} \vec{r}' = a \cos \phi \hat{e}_1 + a \sin \phi \hat{e}_2 \\ \vec{r}'' = r' \hat{e}_1 \end{cases} \quad (6.24)$$

Logo,

$$b = |a \cos \phi \hat{e}_1 + a \sin \phi \hat{e}_2 - r' \hat{e}_1| = \left[(a \cos \phi - r')^2 + a^2 \sin^2 \phi \right]^{1/2} = \left[a^2 + r'^2 - 2ar' \cos \phi \right]^{1/2}$$

e assim,

$$b = a \left[1 + \left(\frac{r'}{a} \right)^2 - 2 \left(\frac{r'}{a} \right) \cos \phi \right]^{1/2} \quad (6.25)$$

Integrando a Equação (6.23), temos

$$\Phi(r') = -G \int \frac{dM}{b} = -G \int \frac{\rho a d\phi}{a \left[1 + (r'/a)^2 - 2(r'/a) \cos \phi \right]^{1/2}}$$

então,

$$\Phi(r') = -G \rho \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\left[1 + (r'/a)^2 - 2(r'/a) \cos \phi \right]^{1/2}} \quad (6.26)$$

A integral na Equação (6.26) é difícil de ser resolvida. Para resolvê-la, vamos considerar posições próximas do ponto de equilíbrio, isto é, $r' = 0$.

Se $r' \ll a$, podemos expandir o denominador na Equação (6.26), isto é,

$$\left[1 + \left(\frac{r'}{a} \right)^2 - 2 \frac{r'}{a} \cos \phi \right]^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{r'}{a} \right)^2 - 2 \frac{r'}{a} \cos \phi \right] + \frac{3}{8} \left[\left(\frac{r'}{a} \right)^2 - 2 \frac{r'}{a} \cos \phi \right]^2 + \dots$$

e então,

$$\left[1 + \left(\frac{r'}{a} \right)^2 - 2 \frac{r'}{a} \cos \phi \right]^{-1/2} = 1 + \frac{r'}{a} \cos \phi + \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{a} \right)^2 (3 \cos^2 \phi - 1) + \dots \quad (6.27)$$

A Equação (6.26) torna-se,

$$\Phi(r') = -\rho G \int_0^{2\pi} \left[1 + \frac{r'}{a} \cos \phi + \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{a} \right)^2 (3 \cos^2 \phi - 1) + \dots \right] d\phi \quad (6.28)$$

que é facilmente integrada com o resultado, considerando $\rho = \frac{M}{2\pi a}$, sendo dado por,

$$\Phi(r') = -\frac{M G}{a} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{r'}{a} \right)^2 + \dots \right] \quad (6.29)$$

A energia potencial $U(r')$ pode ser escrita, a partir da Equação (6.11), simplesmente como

$$U(r') = m\Phi(r') = -\frac{m M G}{a} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{r'}{a} \right)^2 + \dots \right] \quad (6.30)$$

A posição de equilíbrio é encontrado quando $\frac{dU(r')}{dr'} = 0$. Conseqüentemente,

$$-\frac{m M G}{a} \frac{1}{2} \frac{r'^2}{a} + \dots = 0 \quad (6.31)$$

assim, $r' = 0$ é um ponto de equilíbrio. Para determinar a estabilidade, temos,

$$\frac{d^2U(r')}{dr'^2} = -\frac{mMG}{2a^3} + \dots < 0 \quad (6.32)$$

Assim, o ponto de equilíbrio é INSTÁVEL.

Esse último resultado não é óbvio, porque somos fortemente levados a acreditar que um pequeno deslocamento da posição $r' = 0$, provocaria ainda o retorno para $r' = 0$ devido às forças gravitacionais de todas as massas do anel que a circundam.

EQUAÇÃO DE POISSON

É útil comparar essas propriedades dos campos gravitacionais com alguns dos resultados da eletrostática que foram determinados na formulação das equações de Maxwell. Consideremos uma superfície arbitrária como mostrada na Figura (6.6) com uma massa m colocada

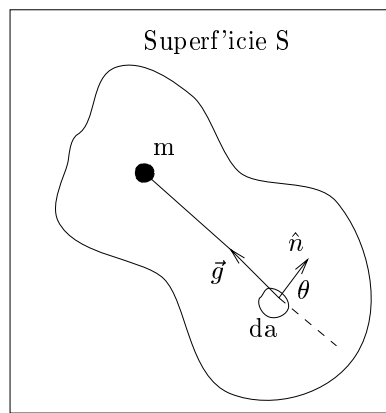


Figura 6.6: Fluxo Gravitacional - Equação de Poisson.

em algum lugar interno.

Analogamente ao fluxo elétrico, vamos encontrar o Fluxo Gravitacional Φ_m originado da massa m através da superfície arbitrária S ,

$$\Phi_m = \int_S \hat{n} \cdot \vec{g} da \quad (6.33)$$

onde a integral é sobre a superfície S e o vetor unitário \hat{n} é normal à superfície na área elementar da . Se substituirmos \vec{g} da Equação (6.3) pelo vetor campo gravitacional para um corpo de massa m , temos para o produto escalar $\hat{n} \cdot \vec{g}$,

$$\hat{n} \cdot \vec{g} = -G m \frac{\cos \theta}{r^2}$$

onde θ é o ângulo entre \hat{n} e \vec{g} . Substituindo na Equação (6.33), obtemos

$$\Phi_m = -G m \int_S \frac{\cos \theta}{r^2} da$$

A integral é sobre o ângulo sólido da superfície arbitrária e tem o valor 4π rad, que fornece para o fluxo de massa o valor,

$$\Phi_m = \int_S \hat{n} \cdot \vec{g} da = -4\pi G m \quad (6.34)$$

Observe que é irrelevante onde a massa está localizada no interior da superfície S . Podemos generalizar esse resultado para muitas massas m_i dentro da superfície S , somando sobre as massas, isto é,

$$\int_S \hat{n} \cdot \vec{g} da = -4\pi G \sum_i m_i \quad (6.35)$$

Se trocarmos por uma distribuição contínua de massa no interior da superfície S , teremos

$$\int_S \hat{n} \cdot \vec{g} da = -4\pi G \int_V \rho dV \quad (6.36)$$

onde a integral do lado direito é sobre o volume V englobado por S , ρ é a densidade de massa, e dV é o volume infinitesimal. Usaremos o Teorema da Divergência de Gauss para reescrever esse resultado,

$$-4\pi G \int_V \rho dV = \int_S \hat{n} \cdot \vec{g} da = \int_V \nabla \cdot \vec{g} dV \quad (6.37)$$

Como a superfície S e seu volume V , são completamente arbitrários, os dois integrandos das Equações (6.36) e (6.37) devem ser iguais, isto é,

$$\nabla \cdot \vec{g} = -4\pi G \rho \quad (6.38)$$

Esse resultado é análogo à forma diferencial da Lei de Gauss para o Campo Elétrico, $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$, onde ρ nesse caso é a densidade de carga elétrica. Mas, $\vec{g} = -\nabla\Phi$. Logo,

$$-\nabla \cdot \nabla\Phi = -4\pi G \rho \implies \nabla^2\Phi = 4\pi G \rho \quad (6.39)$$

que é conhecida como a EQUAÇÃO DE POISSON e é útil em um grande número de aplicações da Teoria do Potencial. Quando o lado direito da Equação (6.39) é zero, o resultado $\nabla^2\Phi = 0$ é uma equação bastante conhecida, chamada, EQUAÇÃO DE LAPLACE. A Equação de Poisson é útil em desenvolver Funções de Green, ao passo que frequentemente encontramos a Equação de Laplace quando tratamos com vários sistemas de coordenadas.

6.3 Linhas de Força e Superfícies Equipotenciais

Consideremos uma massa que dá origem a um campo gravitacional que pode ser descrito por um vetor campo \vec{g} . Desenhemos uma linha para fora da superfície da massa, tal que a direção para todos os pontos seja a mesma da direção de \vec{g} naquele ponto. Essa linha se estenderá da superfície da massa até o infinito. Definidas dessa maneira, as linhas de força estão relacionadas apenas à direção do campo de força para qualquer ponto. Devemos considerar, contudo, que a densidade de tais linhas - isto é, o número de linhas passando através de uma área orientada perpendicularmente às linhas - é proporcional à magnitude da força naquela área. A representação das linhas de força é assim, uma maneira conveniente de visualizar tanto a magnitude quanto a direção do campo, ou seja, as propriedades do vetor.

A função potencial está definida para qualquer ponto no espaço (exceto na posição da massa pontual). Portanto,

$$\Phi = \Phi(x_1, x_2, x_3) = cte \quad (6.40)$$

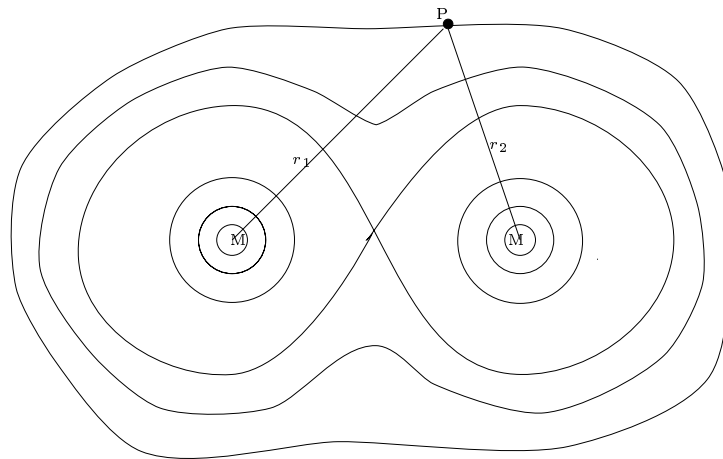


Figura 6.7: Superfícies Equipotenciais para um sistema de duas partículas.

define uma superfície sobre a qual o potencial é constante. Uma tal superfície é chamada de SUPERFÍCIE EQUIPOTENCIAL. O vetor campo \vec{g} é igual ao gradiente de Φ , assim \vec{g} não pode ter nenhuma componente ao longo de uma superfície equipotencial. Portanto, segue que todas as linhas de força devem ser normais à todas as superfícies equipotenciais. Assim, o campo não realiza nenhum trabalho sobre um corpo movendo-se ao longo de uma superfície equipotencial. Porque a função potencial é de valor único, nenhuma superfície equipotencial pode se interceptar ou tocar. As superfícies de igual potencial que circula uma massa pontual isolada (ou qualquer massa simetricamente esférica) são todas esferas. Consideremos duas massas pontuais M que estão separadas por uma certa distância. Se r_1 é a distância de uma das massas a algum ponto no espaço e r_2 é a distância de uma outra massa ao mesmo ponto, então,

$$\Phi = -G M \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = cte \quad (6.41)$$

define as superfícies equipotenciais. Várias dessas superfícies são mostradas na Figura (6.7) para esse sistema de duas partículas. Em três dimensões, as superfícies são geradas pela rotação desse diagrama em torno da linha que conecta as duas massas.

6.4 Quando é que o conceito de Potencial é útil

O uso de potenciais para descrever os efeitos de forças de “Ação a distância” é uma técnica poderosa e de extrema importância. Não devemos, contudo, perder de vista o fato de que a justificativa principal para usar o potencial é o de fornecer um meio conveniente de calcular a força sobre o corpo, ou a energia para o corpo no campo, pois é a força e a energia, e não o potencial, que são as quantidades fisicamente significativas. Assim, em muitos problemas, poderá ser mais fácil que calcular a força diretamente, computar o potencial e então determinar o seu gradiente. A vantagem do uso do método do potencial é que o potencial é uma quantidade ESCALAR. Não precisamos tratar com complicações adicionais com as componentes de um vetor até que a operação do gradiente seja feita. Em cálculos diretos da força, as componentes devem ser levadas em consideração na computação

total. Alguma habilidade então é necessária na escolha do caminho específico a ser usado. Por exemplo, se um problema tem uma simetria particular que, das considerações físicas, permita-nos determinar que a força tem uma certa direção, então a escolha dessa direção como uma das coordenadas reduz o cálculo vetorial a um simples cálculo escalar. Em tal caso, o cálculo direto da força pode ser suficientemente direto para evitar a necessidade do uso do método potencial. Todos os problemas requerendo uma força deve ser examinado para descobrir o método computacional mais fácil e adequado.

EXEMPLO 3: Considere um disco uniforme fino de massa M e raio a . Encontre a força sobre uma massa m localizada ao longo do eixo do disco.

Resolução: Resolveremos esse problema usando ambos os métodos: o potencial e direto da força.

Considere a Figura (6.8) O potencial elementar $d\Phi$ a uma distância z é dado por

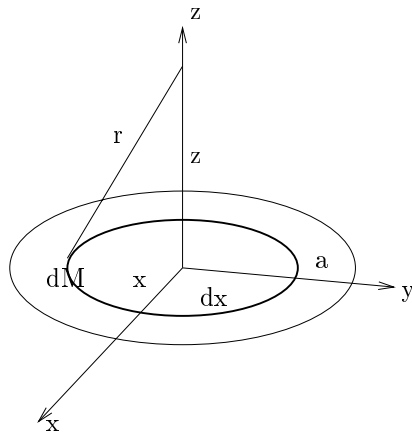


Figura 6.8: Exemplo 3 - Força Gravitacional devido a um disco uniforme.

$$d\Phi = -\frac{G dM}{r} \quad (6.42)$$

O elemento de massa dM é um anel fino de largura dx , porque temos uma simetria azimutal.

$$dM = \rho dA = \rho 2\pi x dx \quad (6.43)$$

Então,

$$d\Phi = -2\pi\rho G \frac{x dx}{r} = -2\pi\rho G \frac{x dx}{(x^2 + z^2)^{1/2}}$$

$$\Phi(z) = -2\pi\rho G \int_0^a \frac{x dx}{r} = -\pi\rho G \int_0^a \frac{2x dx}{(x^2 + z^2)^{1/2}}$$

e,

$$\Phi(z) = -\pi\rho G \left. \frac{(x^2 + z^2)^{1/2}}{1/2} \right|_0^a = -2\pi\rho G \left[(a^2 + z^2)^{1/2} - z \right]$$

assim,

$$\Phi(z) = -2\pi\rho G \left[(a^2 + z^2)^{1/2} - z \right] \quad (6.44)$$

A força será dada por,

$$\vec{F} = -\nabla U = -m \nabla \Phi \quad (6.45)$$

Da simetria, temos apenas uma força na direção z ,

$$F_z = -m \frac{d\Phi}{dz} = m 2\pi \rho G \frac{d}{dz} \left[(a^2 + z^2)^{1/2} - z \right] = 2\pi m \rho G \left[\frac{1}{2}(a^2 + z^2)^{-1/2} (2z) - 1 \right]$$

e portanto,

$$F_z = 2\pi m \rho G \left[\frac{z}{(a^2 + z^2)^{1/2}} - 1 \right] \quad (6.46)$$

Pelo segundo método, computamos a força diretamente usando a Equação (6.43),

$$d\vec{F} = -G m \frac{dM'}{r^2} \hat{e}_r \quad (6.47)$$

onde dM' refere-se à massa de uma pequena área infinitesimal melhor representada por um quadrado do que um fino anel. Os vetores complicam o assunto. Como pode a simetria ajudar? Para todo pequeno dM' sobre um lado do fino anel de largura dx , existe outro dM' sobre o outro lado que cancela exatamente as componentes horizontais de dF sobre m . Analogamente, todas as componentes horizontais se cancelam; e precisamos apenas considerar as componentes de dF ao longo de z .

$$dF_z = \cos \theta |d\vec{F}| = -m G \frac{\cos \theta dM'}{r^2}$$

e, como $\cos \theta = z/r$,

$$dF_z = -m G z \frac{dM'}{r^3}$$

Agora, integramos sobre a massa $dM' = \rho 2\pi x dx$ em torno do anel e obtemos,

$$dF_z = -m G \frac{2\pi x z dx}{r^3}$$

como $r^2 = (x^2 + z^2)^{1/2}$, então

$$F_z = -m G \rho \pi z \int_0^a \frac{2x dx}{(x^2 + z^2)^{3/2}} = -m G \rho \pi z \left. \frac{(x^2 + z^2)^{-1/2}}{-1/2} \right|_0^a$$

e assim,

$$F_z = 2\pi m G \rho z \left(\frac{1}{(a^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{1}{z} \right) \implies F_z = 2\pi m G \rho \left(\frac{z}{(a^2 + z^2)^{1/2}} - 1 \right) \quad (6.48)$$

que é idêntica à Equação (6.46). Observe que o valor de F_z é negativo, indicando que a força é vertical para baixo e atrativa.

6.5 Marés Oceânicas

As marés oceânicas tem sido a muito tempo do interesse do homem. Galileu tentou sem sucesso explicar as marés, pois não levou em consideração as sincronizações das duas marés

altas que ocorrem todos os dias. Newton finalmente deu uma explicação adequada. As marés são causadas pela atração gravitacional entre o oceano e ambos, a Lua e o Sol, porém existem vários fatores complicadores.

O cálculo é complicado pelo fato da superfície da Terra não ser um sistema inercial. A Terra e a Lua giram em torno de seu centro de massa (e movem-se em torno do Sol). Assim, a Terra gira enquanto a Lua gira em torno da Terra. Vamos primeiro considerar apenas o efeito da Lua, adicionando o efeito do Sol mais tarde. Assumiremos um modelo simples de modo que a superfície da Terra está completamente coberta com água, e adicionaremos o efeito da rotação da Terra no tempo apropriado. Escolhemos um sistema de referência inercial x', y', z' como mostrado na Figura (6.9)

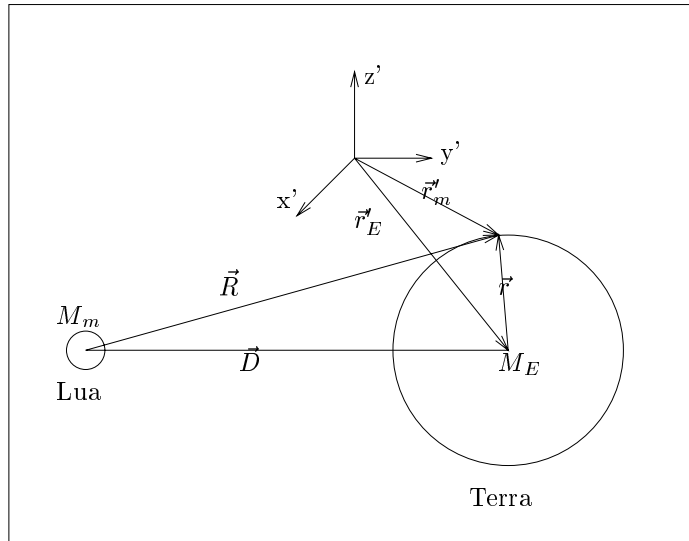


Figura 6.9: Referenciais Inercial e Não inercial.

Seja M_m a massa da Lua, r o raio de uma Terra circular, e D a distância do centro da Lua ao centro da Terra. Consideremos o efeito de ambos, a atração gravitacional da Lua e da Terra sobre uma pequena massa m colocada na superfície da Terra. Como mostrado na Figura (6.9), o vetor posição da massa m até a Lua é \vec{R} , até o centro da Terra é \vec{r} , e de nosso sistema inercial, \vec{r}'_m . O vetor posição do sistema inercial até o centro da Terra é \vec{r}'_E . Medindo a partir do sistema inercial, a força sobre m , devido a Terra e a Lua é,

$$m \ddot{\vec{r}}'_m = -\frac{G m M_E}{r^2} \hat{e}_r - \frac{G m M_m}{R^2} \hat{e}_R \quad (6.49)$$

Analogamente, a força sobre o centro de massa da Terra causada pela Lua é,

$$M_E \ddot{\vec{r}}'_E = -\frac{G M_E M_m}{D^2} \hat{e}_D \quad (6.50)$$

Queremos encontrar a aceleração $\ddot{\vec{r}}$ medida no sistema não inercial colocado no centro da Terra. Portanto, queremos,

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}'_m - \ddot{\vec{r}}'_E = \frac{m \ddot{\vec{r}}'_m}{m} - \frac{M_E \ddot{\vec{r}}'_E}{M_E} = -\frac{G M_E}{r^2} \hat{e}_r - \frac{G M_m}{R^2} \hat{e}_R + \frac{G M_m}{D^2} \hat{e}_D$$

e portanto,

$$\vec{r} = -\frac{G M_E}{r^2} \hat{e}_r - G M_m \left(\frac{\hat{e}_R}{R^2} - \frac{\hat{e}_D}{D^2} \right) \quad (6.51)$$

A primeira parcela é devido à Terra, e a segunda é a aceleração da Força de Maré, que é responsável pelas marés oceânicas. Ela origina-se da diferença entre a atração gravitacional da Lua sobre o centro da Terra e sobre a superfície da Terra.

Vamos encontrar agora o efeito da Força de Maré para vários pontos sobre a Terra, como mostra a Figura (6.10). Mostramos uma vista polar da Terra com o eixo polar ao longo do

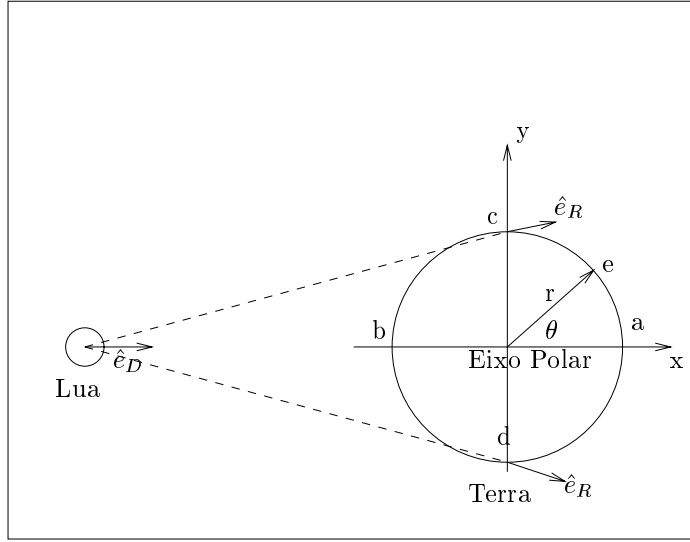


Figura 6.10: Vista polar da Terra com o eixo polar ao longo do eixo z .

eixo z .

A Força de Maré F_T sobre a massa m sobre a superfície da Terra é,

$$\vec{F}_T = -G m M_m \left(\frac{\hat{e}_R}{R^2} - \frac{\hat{e}_D}{D^2} \right) \quad (6.52)$$

onde usamos apenas a segunda parte da Equação (6.51). Observemos inicialmente para o ponto a , o ponto da Terra mais afastado da Lua. Ambos os vetores \hat{e}_R e \hat{e}_D estão apontando na mesma direção se afastando da Lua ao longo do eixo x . Porque $R > D$, o segundo termo na Equação (6.52) predomina, e a Força de Maré está ao longo do eixo x como mostra a Figura (6.11). Para o ponto b , isto é, $R < D$ e a Força de Maré tem a mesma magnitude que aquela no ponto a , mas está ao longo do eixo $-x$. A magnitude da Força de Maré ao longo do eixo x , F_x , é

$$F_x = -G m M_m \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{D^2} \right) = -\frac{G m M_m}{D^2} \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{r}{D}\right)^2} - 1 \right]$$

Expandindo o primeiro termo entre parênteses usando a expansão,

$$(1 + x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots$$

Assim,

$$F_x = -\frac{G m M_m}{D^2} \left[1 - \frac{2r}{D} + 3\left(\frac{r}{D}\right)^2 - + \dots - 1 \right]$$

Então, em primeira ordem,

$$F_x = 2 \frac{G m M_m}{D^3} r \quad (6.53)$$

onde mantivemos apenas o maior termo não nulo na expansão, pois $r/D = 0,02$.

Para o ponto c , o vetor unitário \hat{e}_R mostrado na Figura (6.10) não está exatamente ao longo de \hat{e}_D , mas os componentes do eixo x aproximadamente se cancelam, porque $R \cong D$ e os componentes x de \hat{e}_R e \hat{e}_D são similares. Existirá um pequeno componente de \hat{e}_R ao longo do eixo y . Aproximamos o componente y de \hat{e}_R por $(r/D)\hat{j}$, e a Força de Maré no ponto c , chamada F_y está ao longo do eixo y e tem a magnitude,

$$F_y = -\frac{G m M_m}{D^3} r \quad (6.54)$$

Observe que essa força está ao longo do eixo y em direção ao centro da Terra do ponto c . Encontramos similarmente para o ponto d a mesma magnitude, mas o componente de \hat{e}_R estará ao longo do eixo $-y$, dessa forma a própria força, com o sinal da Equação (6.54), estará ao longo do eixo y em direção ao centro da Terra. Indicamos as Forças de Maré nos pontos a , b , c e d na Figura (6.11) Determinamos a força em um ponto arbitrário e notando

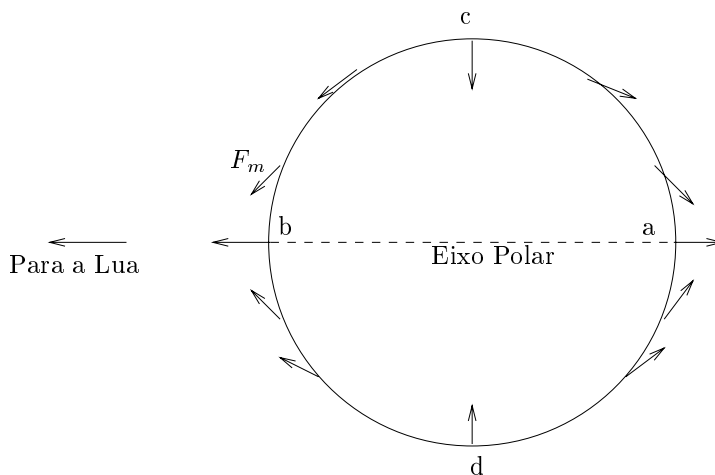


Figura 6.11: Forças de maré.

que os componentes x e y da Força de Maré podem ser encontrados substituindo x e y por r nas expressões de F_x e F_y , respectivamente, nas Equações (6.53) e (6.54), isto é,

$$\begin{cases} F_x = \frac{2 G m M_m}{D^3} x \\ F_y = -\frac{G m M_m}{D^3} y \end{cases}$$

Então para um ponto arbitrário tais como e , consideramos

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

e assim, temos

$$\begin{cases} F_x = \frac{2 G m M_m r \cos \theta}{D^3} \\ F_y = -\frac{G m M_m r \sin \theta}{D^3} \end{cases} \quad (6.55)$$

as Equações (6.55) dão a Força de Maré em torno da Terra para todos os ângulos θ . Observe que elas fornecem os resultados corretos para os pontos a , b , c e d . A Figura (6.11) dá uma representação das Forças de Maré. Para nosso modelo simples, essas forças conduzem a água ao longo do eixo y sendo mais superficial (chato) ao longo do eixo x . Como a Terra faz uma revolução em torno de seu próprio eixo toda 24 h, observaremos duas marés altas no dia.

Um cálculo rápido mostra que a atração gravitacional do Sol é cerca de 175 vezes mais forte que a da Lua sobre a superfície da Terra. Assim, podemos esperar Forças de Maré do Sol. O cálculo da Força de Maré é análogo ao que fizemos para a Lua. O resultado é que a Força de Maré devido ao Sol é 0,46 daquela da Lua, um efeito bastante grande. Apesar da atração mais forte devido ao Sol, o gradiente da força gravitacional sobre a superfície da Terra é muito menor, por causa da grande distância ao Sol.

EXEMPLO 4: Calcule a variação de altura máxima nas marés oceânicas causada pela Lua.

Resolução:

Continuaremos a usar o nosso modelo simples do oceano ao redor da Terra. Newton propôs uma solução deste cálculo imaginando que dois poços sejam escavados, um ao longo da direção de maré alta (nosso eixo x) e um ao longo da direção da maré baixa (nosso eixo y). Se a variação da altura da maré que queremos determinar é h , então a diferença na Energia Potencial de uma massa m devido à diferença de altura é mgh .

Vamos calcular a diferença no trabalho se movermos a massa m de um ponto c na Figura (6.12)

para o centro da Terra e então para o ponto a .

Esse trabalho W feito pela gravidade deve ser igual à variação da Energia Potencial mgh . O trabalho W é,

$$W = \int_{r+\delta_1}^0 F_y dy + \int_0^{r+\delta_2} F_x dx$$

onde usamos as Forças de Maré F_y e F_x das Equações (6.55). As pequenas distâncias δ_1 e δ_2 são para levar em conta as pequenas variações de uma Terra esférica, mas esses valores são tão pequenos que eles podem, daqui em diante, serem desprezados. O valor de W torna-se,

$$W = \frac{G m M_m}{D^3} \left[\int_r^0 (-y) dy + \int_0^r 2x dx \right] = \frac{G m M_m}{D^3} \left(\frac{r^2}{2} + r^2 \right) = \frac{3 G m M_m r^2}{2 D^3}$$

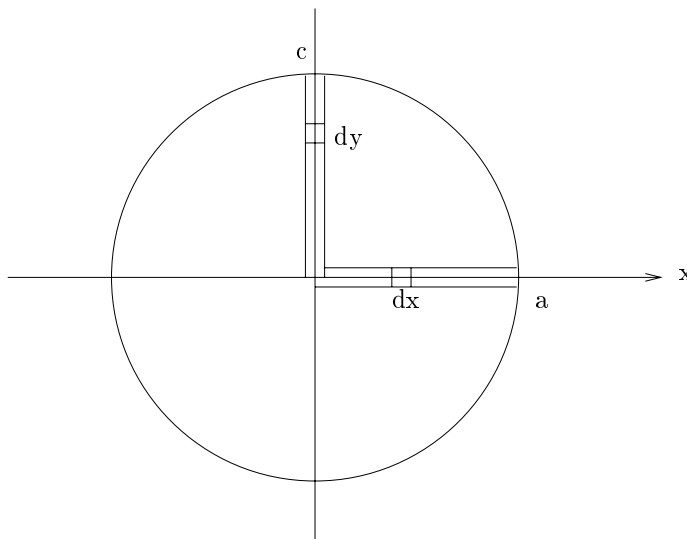


Figura 6.12: Exemplo 4 - Variação da altura máxima nas marés causada pela Lua

Como esse trabalho é igual a $m g h$, temos

$$m g h = \frac{3 G m M_m r^2}{2 D^3} \implies h = \frac{3 G M_m}{2 g D^3} r^2 \quad (6.56)$$

Observe que a massa m cancela, e o valor de h não depende de m . Se inserirmos os valores conhecidos das constantes da Equação (6.56), encontramos

$$h = \frac{3 (6,67 \cdot 10^{-11}) (7,35 \cdot 10^{22}) (6,37 \cdot 10^6)^2}{2 (9,8) (3,84 \cdot 10^8)^3} \implies h = 0,54m$$

As marés mais altas (chamadas marés de primavera) ocorrem quando a Terra, a Lua e o Sol estão alinhados (Lua Nova e Lua Cheia); as mais baixas marés ocorrem para o primeiro e terceiro quartos de Lua quando o Sol e a Lua estão à 90° um do outro, cancelando parcialmente seus efeitos. A maré máxima, que ocorre sempre duas vezes por semana, será de $1,46h$, ou seja, $0,83$ m para as marés de primavera. Um observador que permaneça muito tempo próximo ao oceano notará marés típicas que são maiores que aquelas calculadas no exemplo 4. Vários outros efeitos estão em jogo. A Terra não é completamente coberta com água, e o continente desempenha um papel significativo, especialmente as saliências e os estreitos estuários. Efeitos locais podem ser dramáticos, provocando variações das marés de vários metros. As marés no meio do oceano, contudo, são similares às aquelas que tivemos calculando. Ressonâncias podem afetar a oscilação natural dos corpos de água e causar variações das marés. A fricção de maré entre a água e a Terra leva a uma quantidade significativa de perda de energia sobre a Terra. A Terra não é rígida, e isso é também distorcido pelas forças de marés.

Em adição aos efeitos discutidos, relembramos que como a Terra gira, a Lua está também orbitando em torno da Terra. Isso significa que não existem, exatamente, duas marés altas por dia, porque elas ocorrem uma vez a cada 12 h e 26 min. O plano da órbita da Lua em torno da Terra é também não perpendicular ao eixo de rotação da Terra. Isso faz com que, no dia, uma maré alta seja levemente mais alta que a outra. A fricção de maré entre

a água e a Terra mencionada anteriormente também resulta na Terra “freando” o oceano quando a Terra gira. Isso faz com que as marés altas não sejam exatamente ao longo do eixo Lua-Terra, e sim, vários graus afastados, como mostra a Figura (6.13)

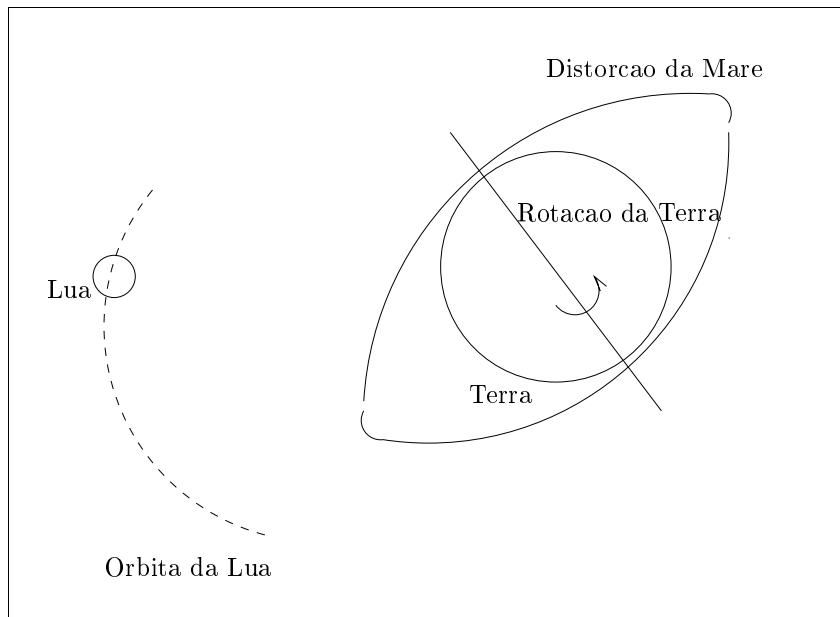


Figura 6.13: Distorção da maré.

6.6 Problemas Resolvidos

01) Encontre a força de atração de uma fina haste uniforme e comprimento $2a$ sobre uma partícula de massa m colocada a uma distância b de seu ponto médio, como mostra a Figura (6.14).

Resolução: O elemento de força, $d\vec{F}$ sobre a partícula de massa m devido a um elemento de massa $dm = \lambda dx$ da haste, onde λ é a densidade linear de massa da haste, é dado por

$$d\vec{F} = \frac{G m \lambda dx}{x^2 + b^2} (\sin \theta \hat{i} - \cos \theta \hat{j})$$

Mas,

$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{x}{(x^2 + b^2)^{1/2}} \\ \cos \theta = \frac{b}{(x^2 + b^2)^{1/2}} \end{cases} \quad (6.57)$$

Assim,

$$d\vec{F} = \hat{i} \frac{G m \lambda x dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}} - \hat{j} \frac{G m \lambda b dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}}$$

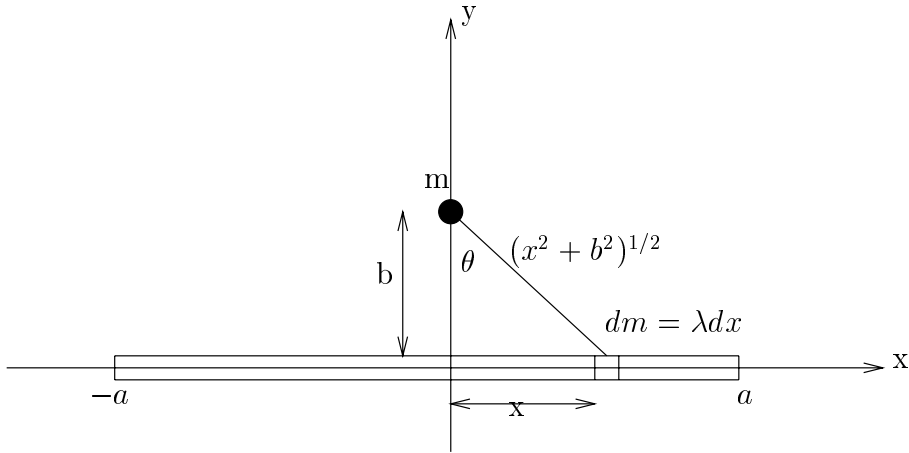


Figura 6.14: Problema Resolvido 1.

ou,

$$\vec{F} = \hat{i} \int_{-a}^a \frac{G m \lambda x dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}} - \hat{j} \int_{-a}^a \frac{G m \lambda b dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}}$$

$$\vec{F} = \hat{i} \frac{G m \lambda}{2} \underbrace{\int_{-a}^a \frac{2x dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}}}_{I_1} - \hat{j} G m \lambda b \underbrace{\int_{-a}^a \frac{dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}}}_{I_2}$$

Calculemos as integrais I_1 e I_2 :

$$I_1 = \int_{-a}^a 2x (x^2 + b^2)^{-3/2} dx = -2(x^2 + b^2)^{-1/2} \Big|_{-a}^a = 0$$

Para calcular I_2 , façamos a seguinte mudança de variáveis:

$$x = b \tan \theta \implies dx = b \sec^2 \theta d\theta$$

então,

$$I_2 = \int_{-a}^a (x^2 + b^2)^{-3/2} dx = \int_{\theta(-a)}^{\theta(a)} \frac{b \sec^2 \theta d\theta}{(b^2 \tan^2 \theta + b^2)^{3/2}} = \int_{\theta(-a)}^{\theta(a)} \frac{b \sec^2 \theta d\theta}{[b^2 (\tan^2 \theta + 1)]^{3/2}}$$

Mas,

$$\tan^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \implies \tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

Então,

$$I_2 = \int \frac{b \sec^2 \theta d\theta}{b^3 \sec^2 \theta} = \frac{1}{b^2} \int \cos \theta d\theta = \frac{1}{b^2} \sin \theta \Big|_{\theta(-a)}^{\theta(a)} = \frac{1}{b^2} \frac{x}{(x^2 + b^2)^{1/2}} \Big|_{-a}^a$$

Logo,

$$I_2 = \frac{1}{b^2} \left[\frac{a}{(a^2 + b^2)^{1/2}} + \frac{a}{(a^2 + b^2)^{1/2}} \right] \implies I_2 = \frac{2a}{b} \frac{1}{(a^2 + b^2)^{1/2}}$$

Portanto,

$$\vec{F} = -G m \sigma b \frac{2a}{b} \frac{1}{(a^2 + b^2)^{1/2}} \hat{j}$$

Como $\lambda = \frac{M}{2a} \implies M = 2\lambda a$, então a força de atração da haste de massa M sobre a partícula de massa m é

$$\vec{F} = -\frac{G m M}{b(a^2 + b^2)^{1/2}} \hat{j}$$

02) Uma placa uniforme de massa M é limitada por dois semi-círculos concêntricos de raios interno e externo a e b , respectivamente, como mostra a Figura (6.15) Encontre a força

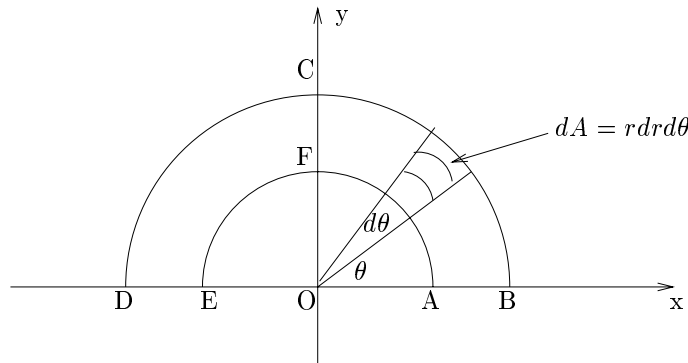


Figura 6.15: Problema Resolvido 2.

de atração da placa sobre uma massa m localizada no centro O .

Resolução:

É conveniente usar as coordenadas polares (r, θ) .

Os elementos de área e de massa da placa são,

$$dA = r dr d\theta \quad e \quad dM = \sigma dA = \sigma r dr d\theta$$

Então a força de atração entre dM e m em O é

$$d\vec{F} = \frac{G m dM}{r^2} (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) = \frac{G m \sigma r dr d\theta}{r^2} (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j})$$

Assim,

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=a}^b \frac{G m \sigma r dr d\theta}{r^2} (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) \\ \vec{F} &= \int_0^{\pi} G m \sigma \ln |r| \Big|_a^b (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) = G m \sigma \ln \left(\frac{b}{a} \right) \int_0^{\pi} (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) d\theta \\ \vec{F} &= 2 G m \sigma \ln \left(\frac{b}{a} \right) \hat{j} \end{aligned}$$

Como $\sigma = \frac{2M}{\pi(b^2 - a^2)}$, então a força de atração da placa sobre a massa m é dada por,

$$\vec{F} = \frac{4 G M m}{\pi(b^2 - a^2)} \ln \left(\frac{b}{a} \right) \hat{j}$$

03) Encontre a força de atração de uma fina casca esférica de raio a sobre uma partícula P de massa m a uma distância $r > a$ do seu centro.

Resolução:

Seja O o centro da esfera. Subdividindo a superfície da esfera em elementos circulares tais como ABCDA da Figura (6.16) e usando planos paralelos perpendiculares à OP , temos

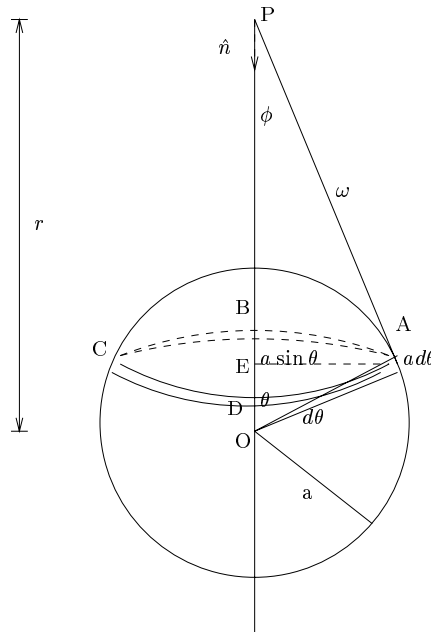


Figura 6.16: Problema 03.

que a área do elemento de superfície ABCDA, como visto na Figura (6.16), é dado por,

$$dA = 2\pi(a \sin \theta)(a d\theta) = 2\pi a^2 \sin \theta d\theta$$

Se σ é a densidade superficial de massa, então a massa de ABCDA, dM , é

$$dM = \sigma dA = \sigma 2\pi a^2 \sin \theta d\theta.$$

Desde que todos os pontos de ABCDA estão à mesma distância ω de P , a força de atração do elemento ABCDA sobre m é,

$$d\vec{F} = \frac{G 2\pi a^2 \sigma m \sin \theta d\theta}{\omega^2} \cos \phi \hat{n}$$

onde temos, por simetria, que a força resultante será na direção do vetor unitário \hat{n} de P para O .

$$\text{Pela Figura (6.16), } \cos \phi = \frac{PE}{AP} = \frac{PO - EO}{AP} \implies \cos \phi = \frac{r - a \cos \theta}{\omega}.$$

$$\text{Pela lei dos cossenos, } \omega^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta.$$

Logo,

$$\cos \phi = \frac{r - a \cos \theta}{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta)^{1/2}}$$

Assim,

$$d\vec{F} = \frac{2\pi G a^2 \sigma m \sin \theta d\theta}{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta)} \frac{(r - a \cos \theta)}{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta)^{1/2}} \hat{n}$$

Assim,

$$\vec{F} = 2\pi a^2 G \sigma m \int \frac{(r - a \cos \theta) \sin \theta d\theta}{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta)^{3/2}} \hat{n}$$

Mas, $\omega^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta \implies \omega d\omega = ar \sin \theta d\theta$

Então,

$$r - a \cos \theta = r - a \frac{(a^2 + r^2 - \omega^2)}{2ar} = \frac{2r^2 - a^2 - r^2 + \omega^2}{2r}$$

Logo,

$$r - a \cos \theta = \frac{\omega^2 - a^2 + r^2}{2r}.$$

Temos também que, quando $\theta = 0 \implies \omega^2 = (r-a)^2$ e, quando $\theta = \pi \implies \omega^2 = (r+a)^2$.

Assim,

$$\vec{F} = 2\pi a^2 \sigma m \int_{r-a}^{r+a} \frac{\omega^2 - a^2 + r^2}{2r} \frac{\omega d\omega}{ar} \frac{1}{\omega^3} \hat{n}$$

Para $r > a$,

$$\vec{F} = \frac{\pi a G \sigma m}{r^2} \int_{r-a}^{r+a} \frac{(\omega^2 - a^2 + r^2)}{\omega^2} d\omega \hat{n} = \frac{\pi G a m \sigma}{r^2} \left[\omega \Big|_{r-a}^{r+a} - \frac{1}{\omega} (r^2 - a^2) \Big|_{r-a}^{r+a} \right] \hat{n}$$

e portanto,

$$\vec{F} = \frac{4\pi G a^2 m \sigma}{r^2} \hat{n} \quad ; r > a$$

Se $r < a$, teremos,

$$\vec{F} = \frac{\pi G a m \sigma}{r^2} \hat{n} \int_{a-r}^{a+r} \left(1 - \frac{a^2 - r^2}{\omega^2} \right) d\omega = 0 \quad ; r < a$$

Portanto, não existe força de atração da casca esférica sobre qualquer massa colocada no seu interior. Isso significa que em tal caso, a partícula estará em equilíbrio no interior da casca.

04) Resolva o problema anterior usando o Método do Potencial.

Resolução:

O Potencial $d\Phi$ devido ao elemento ABCDA é,

$$d\Phi = -\frac{G 2\pi a^2 \sigma \sin \theta d\theta}{\omega} = -\frac{2\pi G a^2 \sigma \sin \theta d\theta}{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta)^{1/2}}$$

Logo,

$$\Phi = -2\pi G a^2 \sigma \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta)^{1/2}}$$

Seja $u = (a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta)^{1/2}$.

Então, $du = 2ar \sin \theta d\theta \implies \sin \theta d\theta = \frac{du}{2ar}$.

Logo,

$$\Phi = -\frac{2\pi G a \sigma}{2ar} \int \frac{du}{u^{1/2}} = -\frac{\pi G a \sigma}{r} \frac{u^{1/2}}{1/2} \Big|_{(a-r)^2}^{(a+r)^2}$$

$$\Phi = -\frac{2\pi G a \sigma}{r} \left[\sqrt{(a+r)^2} - \sqrt{(a-r)^2} \right]$$

Se $r > a$, então

$$\sqrt{(a+r)^2} = a+r \text{ e } \sqrt{(a-r)^2} = r-a.$$

Portanto,

$$\Phi = -\frac{2\pi G a \sigma}{r} (a+r-r+a) \implies \Phi = -\frac{4\pi G a^2 \sigma}{r} \implies \Phi = -\frac{GM}{r}$$

Se $r < a$, então

$$\sqrt{(a+r)^2} = a+r \text{ e } \sqrt{(a-r)^2} = a-r.$$

Portanto,

$$\Phi = -\frac{2\pi G a \sigma}{r} (a+r-a+r) \implies \Phi = -\frac{2\pi G a \sigma 2r}{r} \implies \Phi = -4\pi G a \sigma$$

Como $\vec{F} = -\nabla U$ e $U = m\Phi$, então

$$\text{Para } r > a \implies \vec{F} = -\frac{d}{dr} \left(-\frac{GMm}{r} \right) \hat{r}.$$

Portanto,

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r}$$

que é a mesma força se toda a massa da casca esférica M estivesse concentrada no seu centro.

$$\text{Para } r < a \implies \vec{F} = -\frac{d}{dr} (-4\pi G a m \sigma) \hat{r}.$$

Portanto, $\vec{F} = 0$.

Assim, chegamos à seguinte conclusão: a Força e o Potencial Gravitacionais para pontos no exterior de uma massa distribuída uniformemente sobre uma camada esférica, são idênticos à Força e o Potencial Gravitacionais de uma partícula de mesma massa, colocada no centro da esfera. Em todos os pontos no interior da camada esférica, a força é nula e o Potencial é constante. As Figuras (6.17) ilustram os comportamentos da Força e do Potencial Gravitacionais para uma camada esférica.

05) Encontre a força de atração de uma esfera sólida de raio a e massa M sobre uma partícula de massa m colocada no exterior da esfera.

Resolução:

Dividamos a esfera sólida em finas cascas esféricas. Se ρ é a distância de qualquer uma dessas camadas até o centro e $d\rho$ é a espessura de cada camada, então, a força de atração dessa casca sobre a massa m é,

$$d\vec{F} = \frac{G \sigma (4\pi \rho^2 d\rho) m}{r^2} \hat{n}$$

onde $\sigma = dM/dV$.

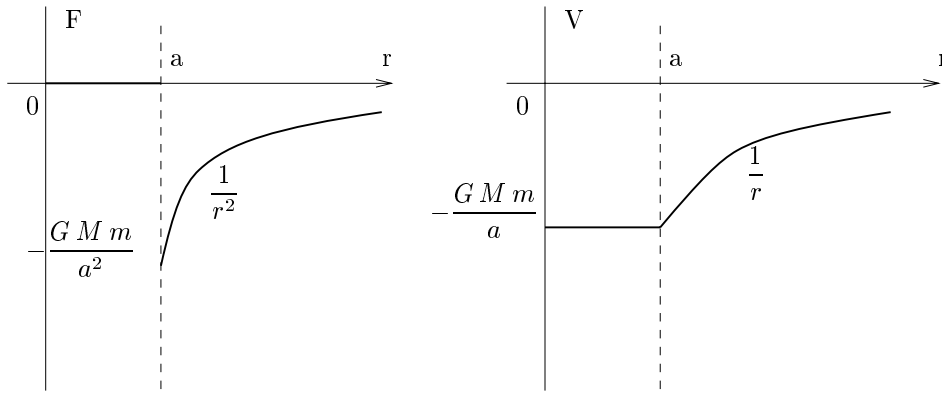


Figura 6.17: Problema 04 - Comportamentos da Força e do Potencial Gravitacionais.

A força total é obtida integrando a expressão de $d\vec{F}$, isto é,

$$\vec{F} = \frac{G 4 \pi \sigma m}{r^2} \hat{n} \int_0^a \rho^2 d\rho = \frac{4 \pi G \sigma m}{r^2} \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^a \hat{n} = \frac{G (4/3 \pi a^3) \sigma m}{r^2} \hat{n}$$

Como $M = 4/3 \pi a^3$, então

$$\vec{F} = \frac{G M m}{r^2} \hat{n}$$

que é a mesma força de atração que seria encontrada se a massa estivesse concentrada no centro.

06) Encontre a força de atração de uma esfera sólida de raio a e massa M sobre uma partícula de massa m a uma distância $b < a$ do seu centro.

Resolução:

A força de atração de qualquer casca esférica contendo m no seu interior é zero. Assim, a força de atração sobre a massa m é a força devido a uma esfera de raio $b < a$ com centro em O . Se ρ é a densidade volumétrica de massa, a força de atração é dada por

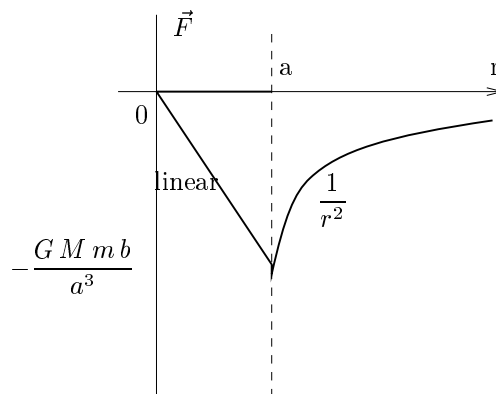


Figura 6.18: Problema 06 - Gráfico da Força Gravitacional em função de r .

$$F = -G \left(\frac{4}{3} \pi b^3 \right) \frac{\rho m}{b^2} = -\frac{4}{3} \pi G \rho m b$$

Como $\rho = \frac{M}{4/3 \pi a^3}$, então

$$F = -4/3 \pi G \frac{M}{4/3 \pi a^3} m b \implies F = -\frac{G M m}{a^3} b$$

Assim, a força varia com a distância b da massa m ao centro da esfera de raio a , ou seja, a força gravitacional em um ponto interior de uma esfera homogênea é proporcional à distância b que a partícula de massa m se encontra do centro.

A Figura (6.18) ilustra o comportamento da força de atração gravitacional num ponto interior e exterior de uma esfera sólida.

07) Encontre o Potencial Gravitacional num ponto interior e exterior de uma esfera sólida.

Resolução:

Considere a Figura (6.19).

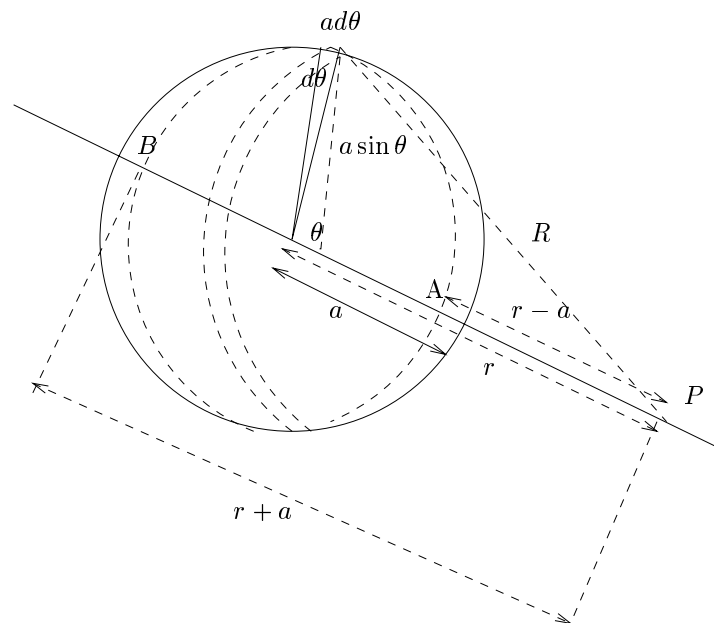


Figura 6.19: Problema 07.

Se m é a massa total, uniformemente distribuída sobre a superfície esférica, a massa por unidade de área é $m/(4\pi a^2)$ e a massa da faixa circular é

$$dm = \frac{m}{4\pi a^2} 2\pi a^2 \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} m \sin \theta d\theta$$

Todos os pontos da faixa estão a igual distância R do ponto P . Portanto,

$$dV = -\frac{G dm}{R} = -\frac{G m \sin \theta}{2R} d\theta$$

Mas, $R^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta \implies \sin \theta d\theta = \frac{R dR}{ar}$

Assim,

$$dV = -\frac{G m}{2 R} \frac{R dR}{a r} = -\frac{G m}{2 a r} dR$$

Para obter o Potencial Total, devemos integrar sobre toda a superfície esférica. Os limites para R , quando o ponto P está fora da esfera, são $r + a$ e $r - a$. Portanto,

$$V = -\frac{G m}{2 a r} \int_{r-a}^{r+a} dR = -\frac{G m}{2 a r} R \Big|_{r-a}^{r+a} \implies V = -\frac{G m}{r} ; r > a$$

é o potencial num ponto fora de uma camada esférica homogênea.

Se o ponto P está no interior da esfera, os limites para R são $a + r$ e $a - r$, resultando,

$$V = -\frac{G m}{2 a r} \int_{a-r}^{a+r} dR = -\frac{G m}{2 a r} R \Big|_{a-r}^{a+r} \implies V = -\frac{G m}{a} ; r < a$$

que dá um potencial constante, independente da posição de P .

08) Uma massa m está situada sobre a perpendicular que atravessa o centro de uma fina placa circular de raio a a uma distância b do centro. Encontre a força de atração entre a placa e a massa m .

Resolução:

Considere a Figura (6.20). Seja \hat{n} um vetor unitário saindo do ponto P , onde se encontra

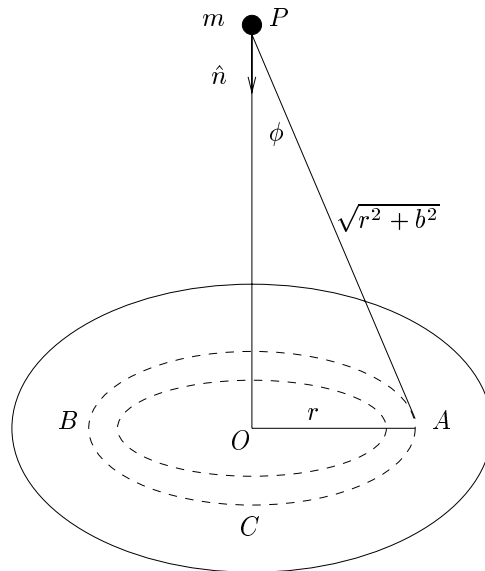


Figura 6.20: Problema 08.

a massa m , e no sentido para o centro da placa. Dividamos a placa circular em anéis circulares tal como ABC de raio r e espessura dr . Se σ é a massa por unidade de área, então a massa elementar, dM , do anel é dada por

$$dM = \sigma 2 \pi r dr.$$

Desde que todos os pontos do anel estão à mesma distância, $(r^2 + b^2)^{1/2}$ de P , a força de atração do anel sobre m será,

$$d\vec{F} = \frac{G \sigma m 2 \pi r dr}{(r^2 + b^2)^{1/2}} \cos \phi \hat{n} = \frac{G \sigma 2 \pi m b r dr}{(r^2 + b^2)^{3/2}} \hat{n}$$

pois, $\cos \phi = \frac{b}{(r^2 + b^2)^{1/2}}$ e usamos o fato que devido à simetria a força resultante é na direção de \hat{n} .

Então a força será dada por,

$$\vec{F} = \int_0^a d\vec{F} = 2 \pi G \sigma m b \int_0^a \frac{r dr}{(r^2 + b^2)^{3/2}} \hat{n}$$

Seja $u^2 = r^2 + b^2$ então, $r dr = u du$.

Também temos que, quando $r = 0$, $u = b$ e, quando $r = a$, $u = (a^2 + b^2)^{1/2}$.

Assim,

$$\vec{F} = 2 \pi G \sigma m b \hat{n} \int_b^{(a^2+b^2)^{1/2}} \frac{u du}{u^3} = -2 \pi G \sigma m b \hat{n} \left(\frac{1}{u} \right) \Big|_b^{(a^2+b^2)^{1/2}}$$

$$\vec{F} = -2 \pi G \sigma m b \hat{n} \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{1}{b} \right] \implies \vec{F} = 2 \pi G \sigma m \left(1 - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \hat{n}$$

Se considerarmos α o valor de ϕ quando $r = a$, então, $\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ e assim, a força é dirigida da massa m para o centro O da placa e tem magnitude,

$$F = 2 \pi G \sigma m (1 - \cos \alpha)$$

09) Um homem pesa 70 kgf . Supondo que o raio da Terra dobrasse, quanto ele pesaria:

a) se a massa da Terra permanecesse constante?

b) se a densidade média da Terra permanecesse constante?

Resolução:

a)

$$F = \frac{G M m}{R^2} = 70 \text{ kgf}$$

$$F' = \frac{G M' m}{R'^2} = \frac{G M m}{4 R^2} = \frac{1}{4} F \implies F' = \frac{70}{4} \text{ kgf}$$

b) $R' = 2R$ e $\rho' = \rho$. Então,

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{4/3 \pi R^3}$$

e,

$$\rho' = \frac{M'}{V'} = \frac{M'}{4/3 \pi R'^3} = \frac{M'}{4/3 \pi 8 R^3}$$

Assim, $M' = 8M$.

Como,

$$F' = \frac{G M' m}{R'^2} = \frac{G 8 M m}{4R^2} = 2 \frac{G M m}{R^2} \implies F' = 2F \implies F' = 140 \text{ kgf}$$

10) Um satélite da Terra move-se numa órbita circular, a uma altura de $h = 300 \text{ km}$ acima da superfície. Considere a massa da Terra como sendo $M = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ e o raio da Terra $R = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$. Calcule:

- a) a velocidade orbital do satélite;
- b) o período de revolução do satélite;
- c) a aceleração centrípeta do satélite.

Resolução:

a)

$$F = \frac{m v^2}{r} = \frac{G M m}{r^2} \implies v = \sqrt{\frac{G M}{r}}$$

onde, $r = R + h$ Assim,

$$v = \sqrt{\frac{(6,67 \cdot 10^{-11}) (5,98 \cdot 10^{24})}{6,7 \cdot 10^6}} \implies v \cong 7,73 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

b)

$$v = \frac{2 \pi r}{T} \implies 7,73 \cdot 10^3 = \frac{2 \pi \cdot 6,7 \cdot 10^6}{T} \implies T \cong 5,37 \cdot 10^3 \text{ s}$$

c)

$$a_c = \frac{v^2}{r} \implies a_c = \frac{59,53 \cdot 10^6}{6,7 \cdot 10^6} \implies a_c \cong 8,89 \text{ m/s}^2$$

11) a) Qual seria o período de um satélite que gira em torno da Terra numa órbita cujo raio é um quarto do raio da órbita da Lua? O período da Lua é aproximadamente 28 dias.

b) Qual seria a razão entre as velocidades do satélite e da Lua?

Resolução: a)

$$\frac{T_s^2}{R_s^3} = \frac{T_l^2}{R_l^3} \implies \frac{T_s^2}{\left(\frac{1}{4}R_l\right)^3} = \frac{28^2}{R_l^3} \implies T_s^2 = 28^2 \frac{1}{4^3} = \frac{28^2}{2^2 \cdot 4^2} \implies T_s = 28/8 T_s = 3,5 \text{ dias.}$$

b)

$$v_s = \sqrt{\frac{G M}{R_s}} ; v_L = \sqrt{\frac{G M}{R_L}}$$

Assim,

$$\frac{v_s}{v_L} = \sqrt{\frac{G M}{R_s} \frac{R_L}{G M}} = \sqrt{\frac{R_L}{R_s}} \implies \frac{v_s}{v_L} = 2$$

12) Um satélite de 5000 kg descreve uma órbita circular a uma altitude de 8000 km, acima da superfície terrestre. Após vários dias, como resultado do atrito com o ar, a órbita diminui para uma altitude de 650 km. Suponha que as órbitas são praticamente circulares, em cada instante, porque a perda de altitude é muito lenta. Calcule a variação na:

- velocidade;
- velocidade angular;
- energia cinética;
- energia potencial;
- energia total;

Resolução:

a)

$$v_o = \sqrt{\frac{GM}{r_o}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{14,4 \cdot 10^6}} \Rightarrow v_o \cong 5,27 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

e

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{7,05 \cdot 10^6}} \Rightarrow v \cong 7,53 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

Assim,

$$\Delta v = (7,53 - 5,27) \cdot 10^3 \Rightarrow \Delta v \cong 2,26 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

b)

$$\omega_o = \frac{v_o}{r_o} = \frac{5,27 \cdot 10^3}{14,4 \cdot 10^6} \Rightarrow \omega_o \cong 0,366 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$$

e

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{7,53 \cdot 10^3}{7,05 \cdot 10^6} \Rightarrow \omega \cong 1,068 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$$

Assim,

$$\Delta \omega = (1,068 - 0,366) \cdot 10^{-3} \Rightarrow \Delta \omega \cong 0,702 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$$

c)

$$T_o = \frac{m v_o^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^2 \cdot 2,78 \cdot 10^7 \Rightarrow T_o \cong 6,95 \cdot 10^9 \text{ J}$$

e

$$T = \frac{m v^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^2 \cdot 5,68 \cdot 10^7 \Rightarrow T \cong 14,2 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Assim,

$$\Delta T = (14,2 - 6,95) \cdot 10^9 \Rightarrow \Delta T \cong 7,25 \cdot 10^9 \text{ J}$$

d)

$$U_o = -\frac{GMm}{r_o} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 5 \cdot 10^2}{14,4 \cdot 10^6} \Rightarrow U_o \cong -13,9 \cdot 10^9 \text{ J}$$

e

$$U = -\frac{GMm}{r} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 5 \cdot 10^2}{7,05 \cdot 10^6} \Rightarrow U \cong -28,38 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Assim,

$$\Delta U = (-28,38 + 13,9) \cdot 10^9 \Rightarrow \Delta U \cong -14,48 \cdot 10^9 \text{ J}$$

e)

$$E_o = T_o - U_o = (6,95 - 13,9) 10^9 \implies E_o = -6,95 10^9 J$$

e

$$E = T - U = (14,2 - 28,38) 10^9 \implies E = -14,18 10^9 J$$

Assim

$$\Delta E = E - E_o = (-14,18 + 6,95) 10^9 \implies \Delta E = -7,23 10^9 J$$

6.7 Algumas Expansões e Integrais Úteis

$$1) (1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots + \binom{n}{r}x^r \quad ; \quad |x| < 1$$

$$2) (1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots + (-1)^r \binom{n}{r}x^r \quad ; \quad -|x| < 1$$

onde, $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ é o coeficiente binomial.

$$3) (1 \pm x)^{-1} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + \dots$$

$$4) (1 \pm x)^{-2} = 1 \mp 2x + 3x^2 \mp 4x^3 + \dots$$

$$5) (1 \pm x)^{-3} = 1 \mp 3x + 6x^2 \mp 10x^3 + \dots$$

$$6) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$7) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad ; \quad |x| < 1, x \neq -1$$

$$8) \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad ; \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$9) \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad ; \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$10) \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan(x/a) \quad ; \quad \int \frac{x dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{2} \ln(a^2 + x^2) \quad ; \quad \int \frac{dx}{x(a^2 + x^2)} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x^2}{a^2 + x^2}$$

$$11) \int \frac{dx}{a^2 x^2 - b^2} = \frac{1}{2ab} \ln \left(\frac{ax - b}{ax + b} \right) = -\frac{1}{ab} \cot^{-1}(ax/b) = -\frac{1}{ab} \tanh^{-1}(ax/b) \quad ; \quad a^2 x^2 < b^2$$

$$12) \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b} \sqrt{a+bx} \quad ; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{x}{a} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1}(x/a)$$

$$13) \int \tanh x dx = -\ln |\cos x| \quad ; \quad \int \tanh x dx = \ln \cosh x \quad ; \quad \int e^{ax} \sin x dx = \frac{e^{ax}}{a^2+1} (a \sin x - \cos x)$$

6.8 Problemas Propostos

- 01) Numa estrela dupla, uma das estrelas tem uma massa de $3 \cdot 10^{33} \text{ kg}$ e a outra uma massa de $4 \cdot 10^{33} \text{ kg}$. Calcule as velocidades angulares das estrelas em torno do centro de massa, sabendo-se que a separação entre elas é de 10^{17} m . Calcule também o Momento Angular Interno Total e a Energia Total.
- 02) Dois corpos de massas m e $3m$ separados por uma distância $13a$. Determine o Campo e o Potencial gravitacionais num ponto P , a uma distância $5a$ da primeira massa sendo que as retas que ligam P às duas massas estão em ângulo reto.
- 03) Se o vetor campo é independente da distância radial dentro da esfera, encontre a função que descreve a densidade $\rho = \rho(r)$ da esfera.
- 04) Considerando que a resistência do ar é desprezível, calcule a mínima velocidade que uma partícula deve ter na superfície da Terra para escapar do campo gravitacional da Terra. Obtenha um valor numérico para o resultado. Essa velocidade é chamada de velocidade de escape.
- 05) Uma partícula é atraída na direção do centro de força de acordo com a relação $F = -m k^2/x^3$. Mostre que o tempo necessário para a partícula atingir o centro de força a partir de uma distância d é d^2/k .
- 06) Calcule diretamente a força gravitacional sobre uma massa unitária em um ponto exterior de uma esfera sólida homogênea.
- 07) Calcule o potencial gravitacional devido a uma fina barra de comprimento l e massa M a uma distância R do centro da barra e na direção perpendicular à barra.
- 08) Calcule o vetor campo gravitacional devido a um cilindro homogêneo para pontos exteriores sobre o eixo do cilindro. Faça o cálculo:
- a) calculando a força diretamente;
- b) utilizando o Método do Potencial.
- 09) Mostre que a auto energia gravitacional de uma esfera uniforme de massa M e raio R é $U = -\frac{3 G M^2}{5 R}$.
- 10) Um meteorito está inicialmente em repouso a uma distância, do centro da Terra, igual a 6 vezes o raio da Terra. Calcule sua velocidade ao atingir a superfície da Terra.
- 11) Duas massas iguais de $6,4 \text{ kg}$ estão separadas por uma distância de $0,16 \text{ m}$. Uma terceira massa é abandonada de um ponto P equidistante das duas massas e a uma distância de $0,06 \text{ m}$ da reta que as une como mostra a Figura (6.21). Determine a velocidade da terceira massa, no instante em que ela passa por Q , ponto médio da reta que une as duas massas iguais. Sabendo-se que a referida massa é de $0,1 \text{ kg}$, calcule sua aceleração nos pontos P e Q .

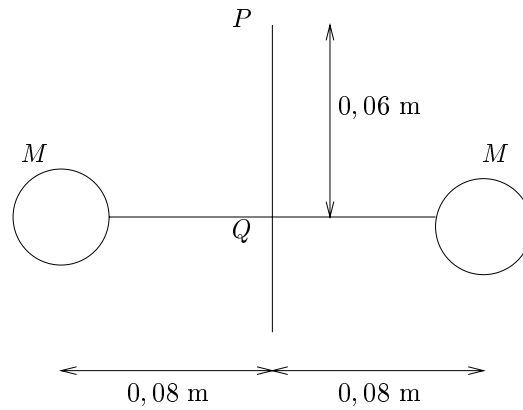


Figura 6.21: Problema 11.

- 12) Um satélite com uma massa de 5000 kg descreve em torno da Terra uma trajetória circular de 8000 km de raio. calcule seu Momento Angular e suas Energias Cinética, Potencial e Total.
- 13) Dois corpos de massas m e $3m$ estão separados por uma distância a . Determine os pontos em que:
- o campo gravitacional resultante é nulo;
 - as duas massas produzem campos gravitacionais que tem o mesmo módulo, direção e sentido;
 - as duas massas produzem potenciais gravitacionais idênticos.
- 14) Dois corpos de massas m e $2m$ ocupam os vértices de um triângulo equilátero de lado a . Determine o campo gravitacional e o potencial.
- no ponto médio entre eles;
 - no terceiro vértice do triângulo.
- 15) A razão entre as massas de um planeta e de um satélite é 81. Um foguete está a uma distância R do planeta e a uma distância r do satélite. Qual deve ser o valor da razão R/r , para que as duas forças de atração sobre o foguete se equilibrem?

7

Oscilações

7.1 Introdução

Consideremos o movimento oscilatório de uma partícula obrigada a mover-se em uma dimensão. Vamos supor que existe uma posição de equilíbrio estável para a partícula, e denominemos este ponto como a origem. Se a partícula é deslocada da origem, em qualquer direção, uma certa força tende a deslocar a partícula para sua posição inicial. Um exemplo desse movimento é aquele realizado por um átomo localizado em uma longa cadeia molecular. A força restauradora é, em geral, alguma função complicada do deslocamento e as vezes da velocidade da partícula, ou mesmo, de alguma derivada de ordem mais alta da coordenada posição. Consideremos aqui apenas casos em que a força restauradora F é uma função apenas do deslocamento: $F = F(x)$.

Consideremos que a função $F(x)$ que representa a força restauradora possua derivadas contínuas de todas as ordens, de modo que a função possa ser expandida em uma série de Taylor:

$$F(x) = F_o + \left(\frac{dF}{dx}\right)\Big|_o x + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)\Big|_o x^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{d^3F}{dx^3}\right)\Big|_o x^3 + \dots, \quad (7.1)$$

onde F_o é o valor de $F(x)$ na origem ($x = 0$), e $\left(\frac{d^n F}{dx^n}\right)\Big|_o$ é o valor da n -ésima derivada na origem. Como a origem é definida como sendo o ponto de equilíbrio, F_o deve anular-se, pois do contrário, a partícula se moverá afastando-se do ponto de equilíbrio e não retornará. Se, então, limitarmos nossa atenção para deslocamentos da partícula que sejam suficientemente pequenos, podemos normalmente desprezar todos os termos envolvendo potências de x maiores ou iguais a 2. Temos, portanto, a relação aproximada

$$F(x) = -kx \quad (7.2)$$

onde substituímos $k \equiv -\left(\frac{dF}{dx}\right)\Big|_o$. Porque a força restauradora está sempre dirigida na direção da posição de equilíbrio (a origem), a derivada $\left(\frac{dF}{dx}\right)\Big|_o$ é negativa, e portanto k é

uma constante positiva. Apenas a primeira ordem do deslocamento aparece em $F(x)$, assim a força restauradora nesta aproximação é uma FORÇA LINEAR.

Sistemas físicos descritos em termos da Equação (7.2) obedecem a “Lei de Hooke”. Uma das classes de fenômenos físicos que pode ser tratada aplicando a Lei de Hooke é aquela envolvendo deformações elásticas. Quando os deslocamentos são pequenos e os limites elásticos não são ultrapassados, uma força restauradora linear pode ser usada para problemas de molas alongadas, molas elásticas, e coisas do tipo. Mas, devemos enfatizar que tais cálculos são apenas aproximados, porque essencialmente toda força restauradora real na natureza é mais complicada que a força simples representada pela Lei de Hooke. Forças lineares são apenas aproximações úteis, e sua validade é limitada aos casos em que as amplitudes de oscilações são pequenas.

Oscilações amortecidas, geralmente resultante da fricção, são quase sempre o tipo de oscilações que ocorrem na natureza. Consideremos neste capítulo como descrever um sistema amortecido eficiente. Este amortecimento das oscilações pode ser neutralizado se algum mecanismo suprir o sistema com energia de uma fonte externa a uma taxa igual àquela absorvida pelo meio. Movimentos desse tipo são chamados Oscilações Amortecidas (ou forçadas). Normalmente senoidais, eles tem importantes aplicações tanto em vibrações mecânicas quanto em sistemas elétricos.

A discussão extensiva de sistemas oscilatórios lineares é garantida pela grande importância de fenômenos oscilatórios em muitas áreas da física e engenharia. É geralmente permitido o uso da aproximação linear na análise de tais sistemas. A vantagem dessas análises é devido, em grande parte, ao fato que podemos geralmente usar métodos analíticos. Quando olhamos mais cuidadosamente para sistemas físicos, encontramos que um grande número deles são, em geral, NÃO LINEARES. Mas, eles não serão discutidos neste curso.

7.2 Oscilador Harmônico Simples

A equação do movimento para o Oscilador Harmônico Simples pode ser obtida substituindo a força da lei de Hooke na equação de Newton $F = ma$. Assim,

$$-kx = ma \quad (7.3)$$

Se definirmos

$$\omega_o^2 = \frac{k}{m} \quad (7.4)$$

a Equação (7.3) torna-se

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0 \quad (7.5)$$

A solução da Equação (7.5) pode ser expressa nas formas,

$$\begin{cases} x(t) = A \sin(\omega_o t - \delta) \\ x(t) = A \cos(\omega_o t - \phi) \end{cases} \quad (7.6)$$

onde as fases δ e ϕ diferem por um fator $\frac{\pi}{2}$. Uma mudança no ângulo de fase corresponde a uma mudança do instante que denominamos $t = 0$, a origem da escala do tempo. As Equações (7.6) exibem o bem conhecido comportamento senoidal do deslocamento do Oscilador Harmônico Simple (OHS).

Podemos obter a relação entre a Energia Total do oscilador e a amplitude de seu movimento como segue. Usando a primeira expressão das Equações (7.6) para $x(t)$, encontramos para a Energia Cinética,

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x} = \frac{1}{2} m \omega_o^2 A^2 \cos^2(\omega_o t - \delta) = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega_o t - \delta) \quad (7.7)$$

A Energia Potencial pode ser obtida calculando o trabalho requerido para deslocar a partícula uma distância x . A quantidade incremental de trabalho dW necessário para mover a partícula por uma quantidade dx contra a força restauradora F é,

$$dW = -F dx = k x dx .$$

Integrando de 0 a x e igualando o trabalho feito sobre a partícula à Energia Potencial, temos

$$U = \frac{1}{2} k x^2 \quad (7.8)$$

Então,

$$U = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega_o t - \delta) \quad (7.9)$$

Combinando as expressões para T e U determinamos a Energia Total,

$$E = T + U = \frac{1}{2} k A^2 [\cos^2(\omega_o t - \delta) + \sin^2(\omega_o t - \delta)]$$

Assim,

$$E = \frac{1}{2} k A^2 , \quad (7.10)$$

de modo que a Energia Total é proporcional ao quadrado da amplitude; este é um resultado geral para um sistema linear. Observemos também que E é independente do tempo; isto é, a energia é CONSERVADA. A conservação da Energia é garantida, porque consideramos um sistema sem perdas por fricção ou outras forças externas.

O período τ_o do movimento é definido como sendo o intervalo de tempo entre repetições sucessivas da posição e direção do movimento da partícula. Tal intervalo ocorre quando o argumento da função seno na Equação (7.6) aumenta de 2π :

$$\omega_o \tau_o = 2\pi \implies \tau_o = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} . \quad (7.11)$$

onde ω_o representa a FREQUÊNCIA ANGULAR do movimento, que está relacionada à frequência ν_o por,

$$\omega_o = 2\pi \nu_o = \sqrt{\frac{k}{m}} \implies \nu_o = \frac{1}{\tau_o} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} . \quad (7.12)$$

Observe que o período do Oscilador Harmônico Simples é INDEPENDENTE da AMPLITUDE (ou Energia Total); um sistema exibindo esta propriedade é dito ser ISÓCRONO.

Para muitos problemas, dos quais o pêndulo simples é o melhor exemplo, a equação do movimento resulta em

$$\ddot{\theta} + \omega_o^2 \sin \theta = 0 ,$$

onde θ é o deslocamento angular de equilíbrio, e $\omega_o = \sqrt{\frac{g}{l}}$, sendo l o comprimento do pêndulo.

Para demonstrarmos essa equação, consideremos a Figura (7.1). Temos que,

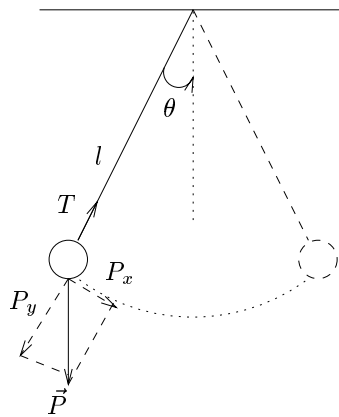


Figura 7.1: Pêndulo Simples.

$$P_x = P \sin \theta = mg \sin \theta .$$

Como a força tangencial $F_t = P_x$, então

$$m a_t = ml\ddot{\theta} = -m g \sin \theta \implies \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

e portanto,

$$\ddot{\theta} + \omega_o^2 \sin \theta = 0 .$$

Podemos fazer esta equação diferencial descrever o Movimento Harmônico Simples fazendo a suposição de PEQUENAS OSCILAÇÕES. Se as oscilações em torno do equilíbrio são pequenas, expandimos as funções $\sin \theta$ e $\cos \theta$ em séries de potências, isto é,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - + \dots \\ \cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - + \dots \end{array} \right. \quad (7.13)$$

e mantemos apenas os termos de mais baixa ordem que são os de maior importância. Isso frequentemente significa $\sin \theta = \theta$ e $\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!}$, onde θ é medido em radianos. Se usarmos a aproximação para pequenas oscilações para o pêndulo simples, a equação do movimento torna-se,

$$\ddot{\theta} + \omega_o^2 \theta = 0 ,$$

que é uma equação que representa o Movimento Harmônico Simples. Iremos frequentemente utilizar essa suposição por todo esse texto e em seus problemas.

7.3 Oscilações Harmônicas em Duas Dimensões

Consideremos o movimento de uma partícula que apresenta dois graus de liberdade. Façamos a força restauradora ser proporcional à distância da partícula ao centro de força localizado na origem e dirigido para a origem:

$$\vec{F} = -k \vec{r}$$

que pode ser resolvida em coordenadas polares nos componentes,

$$\begin{cases} F_x = -k r \cos \theta = -k x \\ F_y = -k r \sin \theta = -k y \end{cases} \quad (7.14)$$

As equações do movimento são,

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_o^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega_o^2 y = 0 \end{cases} \quad (7.15)$$

onde, como antes, $\omega_o^2 = k/m$. As soluções são,

$$\begin{cases} x(t) = A \cos(\omega_o t - \alpha) \\ y(t) = B \cos(\omega_o t - \beta) \end{cases} \quad (7.16)$$

Assim, o movimento é um Oscilador Harmônico Simples em cada uma das duas direções, ambos oscilando com a mesma frequência mas, possivelmente, diferindo em amplitude e fase. Obteremos a equação para a trajetória da partícula eliminando o parâmetro t , que representa o tempo, entre as duas equações (7.16). Primeiro escrevemos,

$$y(t) = B \cos[(\omega_o t - \alpha) + (\alpha - \beta)]$$

ou seja,

$$y(t) = B \cos(\omega_o t - \alpha) \cos(\alpha - \beta) - B \sin(\omega_o t - \alpha) \sin(\alpha - \beta) \quad (7.17)$$

Definindo $\delta = \alpha - \beta$ e notando que $\cos(\omega_o t - \alpha) = \frac{x}{A}$, temos

$$y(t) = \frac{B}{A} x \cos \delta - B \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{A^2}\right)} \sin \delta$$

ou,

$$y(t) - \frac{B}{A} x \cos \delta = -B \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{A^2}\right)} \sin \delta \implies Ay(t) - Bx \cos \delta = -B \sqrt{A^2 - x^2} \sin \delta \quad (7.18)$$

Elevando ambos os membros da Equação (7.18) ao quadrado, obtemos

$$A^2 y^2 - 2ABxy \cos \delta + B^2 x^2 \cos^2 \delta = B^2 (A^2 - x^2) \sin^2 \delta$$

$$A^2 y^2 - 2ABxy \cos \delta + B^2 x^2 (\cos^2 \delta + \sin^2 \delta) = A^2 B^2 \sin^2 \delta$$

assim,

$$B^2 x^2 - 2ABxy \cos \delta + A^2 y^2 = A^2 B^2 \sin^2 \delta . \quad (7.19)$$

Se δ é considerado igual a $\pm\pi/2$, essa equação se reduz à equação de uma elipse, isto é,

$$B^2 x^2 + A^2 y^2 = A^2 B^2 \implies \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 , \quad \delta = \pm\pi/2 \quad (7.20)$$

Outro caso especial resulta se a fase δ se anula; então temos

$$B^2 x^2 + A^2 y^2 - 2ABxy = 0 \implies (Bx - Ay)^2 = 0$$

que é a equação de uma linha reta:

$$y = \frac{B}{A} x , \quad \delta = 0 \quad (7.21)$$

Analogamente, a fase $\delta = \pm\pi$ fornece a linha reta de inclinação oposta:

$$y = -\frac{B}{A} x , \quad \delta = \pm\pi \quad (7.22)$$

As curvas da Figura (7.2) ilustram a Equação (7.20) para os casos $A = B$, $\delta = \pi/2$ ou

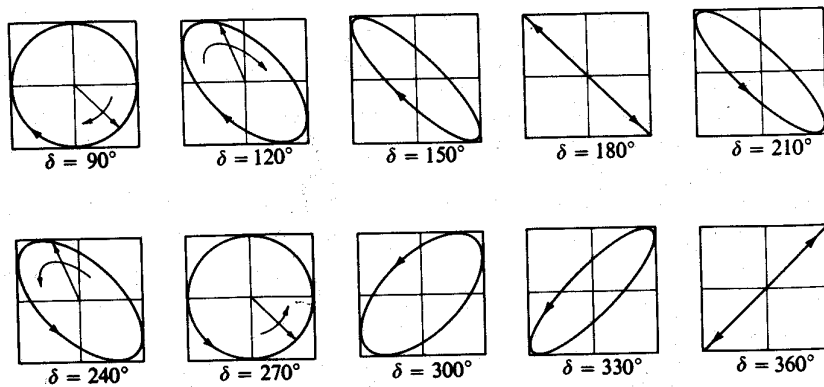


Figura 7.2: Oscilador Bidimensional.

$3\pi/2$ fornecendo um círculo, e $\delta = \pi$ ou 2π , fornecendo uma linha reta. Todos os outros valores de δ fornecem elipses.

No caso geral de oscilações bi-dimensionais, as frequências angulares para os movimentos nas direções $x - y$ não precisam ser iguais, de modo que a Equação (7.16) torna-se

$$\begin{cases} x(t) = A \cos(\omega_x t - \alpha) \\ y(t) = B \cos(\omega_y t - \beta) \end{cases} \quad (7.23)$$

A trajetória do movimento não é mais uma elipse, mas uma CURVA DE LISSAJOUS, demonstrada pela primeira vez pelo físico francês Jules Lissajous (1822 - 1880). Uma tal curva será fechada se o movimento se repete em intervalos de tempo regulares. Isto será possível só se as frequências angulares ω_x e ω_y são comensuráveis, isto é, se $\frac{\omega_x}{\omega_y}$ é uma fração racional. Tal caso é mostrado na Figura (7.3) em que $\omega_y = \frac{3}{4}\omega_x$, $A = B$ e $\alpha = \beta$.

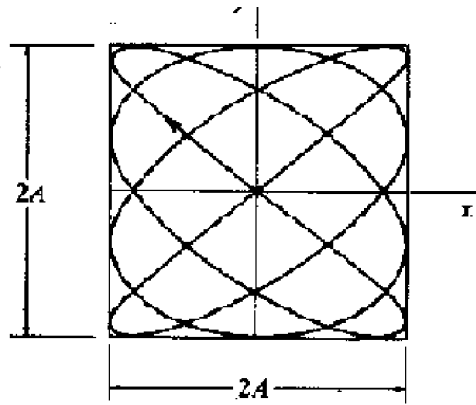


Figura 7.3: Figuras de Lissajous.

Se a razão das frequências angulares não é uma fração racional, a curva será aberta; isto é, o movimento da partícula nunca passará duas vezes através do mesmo ponto com a mesma velocidade. Em tal caso, após ter decorrido um tempo suficientemente longo, a curva passará arbitrariamente próximo de cada ponto dentro do retângulo de lados $2A$ e $2B$ e portanto “preencherá” o retângulo.

O Oscilador bi-dimensional é um exemplo de um sistema em que uma variação infinitesimal pode resultar em qualitativamente diferentes tipos de movimentos. O movimento será ao longo de um caminho fechado se as duas frequências angulares são comensuráveis. Mas, se a razão das frequências se desvia de uma fração racional, mesmo por uma quantidade infinitesimal, então o caminho não será fechado e preencherá o retângulo. Para o caminho ser fechado, a razão das frequências angulares deve ser conhecida como sendo uma fração racional com precisão infinita.

Se as frequências angulares para os movimentos nas direções x e y são diferentes, a forma da curva de Lissajous resultante depende fortemente da diferença de fase $\delta = \alpha - \beta$. A Figura (7.4) mostra os resultados para o caso $\omega_y = 2\omega_x$ e $\delta = 0, \pi/3$ e $\pi/2$.

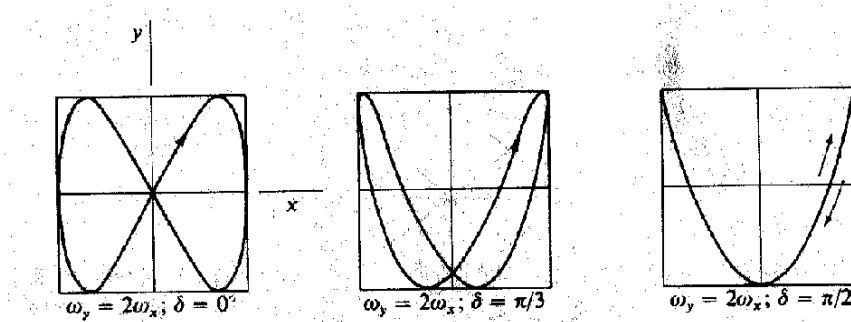


Figura 7.4: Figuras de Lissajous para o caso $\omega_y = 2\omega_x$ e $\delta = 0, \pi/3$ e $\pi/2$.

7.4 Diagramas de Fase

O estado de movimento de um oscilador unidimensional, tal como discutido na seção 2, estará completamente especificado como uma função do tempo se duas quantidades são dadas num instante t , isto é, as condições iniciais $x(t_0)$ e $\dot{x}(t_0)$. Duas quantidades são necessárias porque a equação diferencial para o movimento é de segunda ordem. Podemos considerar as quantidades $x(t)$ e $\dot{x}(t)$ como sendo as coordenadas de um ponto num espaço bi-dimensional, chamado ESPAÇO DE FASE. Em duas dimensões, o espaço de fase é um PLANO DE FASE. Mas, para um oscilador geral com n graus de liberdade, o espaço de fase é um espaço $2n$ -dimensional. Como o tempo varia, o ponto $P(x, \dot{x})$ descreve o estado da partícula oscilante movendo-se ao longo de um certo caminho de fase no plano de fase. Para diferentes condições iniciais do oscilador, o movimento será descrito pelos diferentes caminhos de fase. Qualquer caminho dado representa a história completa no tempo do oscilador para um certo conjunto de condições iniciais. A totalidade de todos os caminhos de fase possíveis constitui a IMAGEM DE FASE ou o DIAGRAMA DE FASE do oscilador.

De acordo com os resultados da seção precedente, temos, para o Oscilador Harmônico Simples,

$$\begin{cases} x(t) = A \sin(\omega_o t - \delta) \\ \dot{x}(t) = A \omega_o \cos(\omega_o t - \delta) \end{cases} \quad (7.24)$$

Se eliminarmos o parâmetro t , tempo, dessas equações, encontramos a equação da trajetória, isto é,

$$\begin{cases} x^2 = A^2 \sin^2(\omega_o t - \delta) \implies \frac{x^2}{A^2} = \sin^2(\omega_o t - \delta) \\ \dot{x}^2 = A^2 \omega_o^2 \cos^2(\omega_o t - \delta) \implies \frac{\dot{x}^2}{A^2 \omega_o^2} = \cos^2(\omega_o t - \delta) \end{cases}$$

ou seja,

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{A^2 \omega_o^2} = 1. \quad (7.25)$$

A Equação (7.25) representa uma família de elipses, algumas das quais são mostradas na Figura (7.5). Essas configurações não são restritas à partículas oscilantes ou sistema oscilantes.

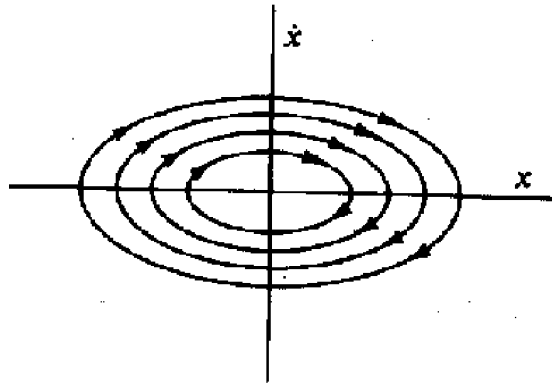


Figura 7.5: Espaço de fase para o Oscilador Harmônico Simples.

O conceito de espaço de fase é aplicado extensivamente em vários campos da Física, particularmente na Mecânica Estatística. O plano de fase ordinário é algumas vezes escolhido como \dot{x}/ω_o ao invés de \dot{x} ; os caminhos de fase são então círculos.

Sabemos que a Energia Total E do oscilador é $\frac{1}{2}kA^2$. Como $\omega_o^2 = \frac{k}{m}$, a Equação (7.25) pode ser reescrita como

$$\frac{x^2}{\frac{k}{2E}} + \frac{\dot{x}^2}{\frac{m}{2E}} = 1.$$

Cada caminho de fase, então, corresponde a uma Energia Total específica do oscilador. Esse resultado era esperado pois o sistema é conservativo, isto é, $E = cte$.

Nenhum dos caminhos de fase podem se cruzar. Se eles pudessem se cruzar, isso implicaria que para um dado conjunto de condições iniciais $x(t_o)$, $\dot{x}(t_o)$, ou seja, as coordenadas do ponto de interseção, o movimento poderia seguir ao longo de diferentes caminhos de fase. Mas, isso é impossível porque a solução da equação diferencial é única.

Se os eixos coordenados do plano de fase são escolhidos como na Figura (7.5), o movimento do PONTO REPRESENTATIVO $P(x, \dot{x})$ será sempre no sentido horário porque para $x > 0$, a velocidade \dot{x} é sempre decrescente e para $x < 0$, a velocidade é sempre crescente.

Para obter as Equações (7.24) para $x(t)$ e $\dot{x}(t)$, devemos integrar a Equação (7.5), que é uma equação diferencial de segunda ordem:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_o^2 x = 0 \quad (7.26)$$

Podemos obter a equação para o caminho de fase, contudo, por um procedimento mais simples, porque a Equação (7.26) pode ser substituída pelo par de equações,

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad , \quad \frac{d\dot{x}}{dt} = -\omega_o^2 x. \quad (7.27)$$

Se dividirmos a segunda pela primeira das Equações (7.27), obtemos

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = -\omega_o^2 \frac{x}{\dot{x}}. \quad (7.28)$$

Essa é uma equação diferencial de primeira ordem para $\dot{x} = \dot{x}(x)$. A solução para a mesma é exatamente a Equação (7.25). Para o Oscilador Harmônico Simples, não existe nenhuma dificuldade em se obter a solução geral para o movimento resolvendo a equação de segunda ordem. Mas, em situações mais complicadas, é algumas vezes consideravelmente mais fácil encontrar diretamente a equação do caminho de fase $\dot{x} = \dot{x}(t)$ sem seguir o cálculo de $x(t)$.

7.5 Oscilações Amortecidas

O movimento representado pelo Oscilador Harmônico Simples é denominado OSCILAÇÃO LIVRE; uma vez iniciada a oscilação, o movimento nunca cessa. Entretanto, no caso físico real, forças dissipativas ou de fricção eventualmente amortecem o movimento do ponto que está oscilando. Podemos analisar o movimento em tal caso incorporando na equação diferencial um termo representativo da força de amortecimento. Não parece razoável que a força amortecedora, em geral, dependa do deslocamento. É mais provável que seja uma função da velocidade ou mesmo de alguma derivada de ordem mais alta do deslocamento com relação ao tempo. Em geral é suposto que a força amortecedora seja uma função linear da velocidade, $\vec{F}_r = \alpha \vec{v}$. Consideraremos apenas oscilações amortecidas uni-dimensionais de modo que possamos representar o termo de amortecimento por $-b\dot{x}$. O parâmetro b deve ser positivo de modo que a força de amortecimento, de fato, seja resistiva. Assim, se uma partícula de massa m move-se sob a influência combinada de uma força restauradora $-kx$ e uma força resistiva $-b\dot{x}$, a equação diferencial descrevendo o movimento é,

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad (7.29)$$

que pode ser escrita como,

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_o^2 x = 0 \quad (7.30)$$

onde $\beta = b/2m$ é o PARÂMETRO DE AMORTECIMENTO e $\omega_o^2 = k/m$ é a FREQUÊNCIA ANGULAR CARACTERÍSTICA na ausência do amortecimento. Para encontrar as raízes da equação auxiliar dada por,

$$r^2 + 2\beta r + \omega_o^2 = 0,$$

precisamos encontrar o Δ , ou seja,

$$\Delta = (4\beta^2 - 4\omega_o^2) \implies \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{\beta^2 - \omega_o^2} \implies r = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_o^2}.$$

Assim, as raízes da equação auxiliar são dadas por,

$$\begin{cases} r_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_o^2} \\ r_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_o^2} \end{cases} \quad (7.31)$$

A solução geral da Equação (7.30) é portanto,

$$x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$$

e portanto,

$$x(t) = e^{-\beta t} [A_1 e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + A_2 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t}]. \quad (7.32)$$

Existem três casos gerais de interesse:

- 01) Caso SUB-AMORTECIDO: $\omega_0^2 > \beta^2$
- 02) Caso CRITICAMENTE AMORTECIDO: $\omega_0^2 = \beta^2$
- 03) Caso SUPERAMORTECIDO: $\omega_0^2 < \beta^2$

O movimento dos três casos é mostrado esquematicamente na Figura (7.6) para condições

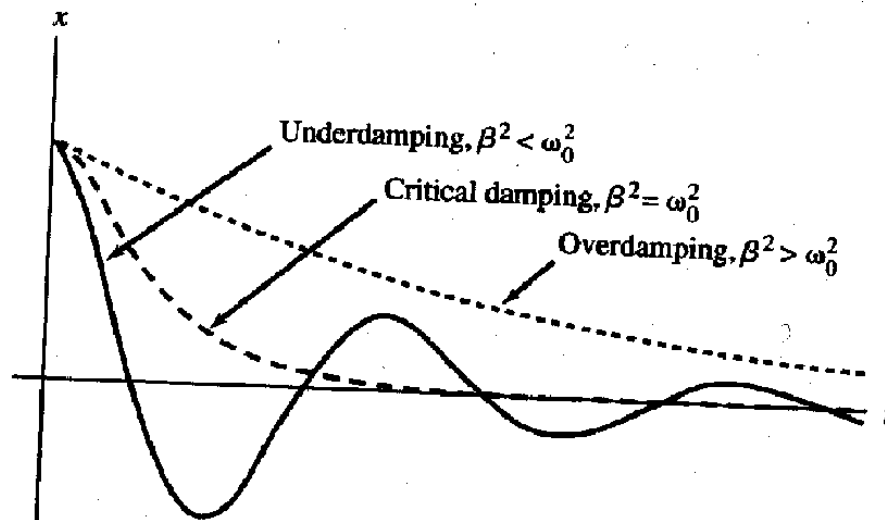


Figura 7.6: Oscilador Amortecido: Sub-amortecido, criticamente amortecido e superamortecido.

iniciais específicas. Veremos que apenas o caso sub-amortecido resulta em movimento oscilatório. Estudemos estes três casos separadamente.

7.5.1 Movimento Sub-amortecido

Para o caso do movimento sub-amortecido, é conveniente definir $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2$, onde $\omega_1^2 > 0$. Então, a Equação (7.32) transforma-se em,

$$x(t) = e^{-\beta t} [A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{-i\omega_1 t}]. \quad (7.33)$$

A Equação (7.33) pode ser reescrita como,

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \delta) \quad (7.34)$$

pois,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\beta t} [A_1 (\cos \omega_1 t + i \sin \omega_1 t) + A_2 (\cos \omega_1 t - i \sin \omega_1 t)] \\ x(t) &= e^{-\beta t} [(A_1 + A_2) \cos \omega_1 t + i(A_1 - A_2) \sin \omega_1 t] \end{aligned}$$

Sejam $A_1 + A_2 = C_1$ e $i(A_1 - A_2) = C_2$. Logo,

$$x(t) = e^{-\beta t} (C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t)$$

Mas,

$$C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos \omega_1 t + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \sin \omega_1 t \right)$$

Seja $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$. Então,

$$\begin{cases} \cos \delta = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \\ \sin \delta = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \end{cases}$$

Portanto,

$$C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t = A (\cos \omega_1 t \cos \delta + \sin \omega_1 t \sin \delta) = A \cos(\omega_1 t - \delta)$$

onde $0 \leq \delta \leq \pi$.

Assim,

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \delta)$$

que é a Equação (7.34) que queríamos demonstrar.

Chamamos a quantidade ω_1 de frequência angular do oscilador amortecido. Estritamente falando, não podemos definir uma frequência angular quando o amortecimento está presente, porque o movimento é NÃO PERIÓDICO - isto é, o oscilador nunca passa duas vezes através de um dado ponto com a mesma velocidade. Contudo, porque $\omega_1 = \frac{2\pi}{2T_1}$, onde T_1 é o tempo entre zeros adjacentes cruzados no eixo x , a frequência angular ω_1 tem significado para um dado período de tempo. Observe que $2T_1$ seria o “período” neste caso, não T_1 . Por simplicidade, iremos nos referir a ω_1 como a “frequência angular” do oscilador amortecido, e notamos que esta quantidade é menor que a frequência do oscilador na ausência de amortecimento, isto é, $\omega_1 < \omega_o$. Se o amortecimento é pequeno, então $\omega_1 = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2} \cong \omega_o$, de modo que o termo FREQUÊNCIA ANGULAR pode ser usado. Mas, o significado não é preciso a menos que $\beta = 0$.

A amplitude máxima do movimento do oscilador amortecido decresce com o tempo por causa do fator $e^{-\beta t}$, onde $\beta > 0$, e a curva envelope do deslocamento versus o tempo é dada por,

$$x_{env} = \pm A e^{-\beta t} \quad (7.35)$$

Estas curvas, envelope e deslocamento, são mostradas na Figura (7.7) para o caso $\delta = 0$.

A curva senoidal para o movimento não amortecido ($\beta = 0$) é também mostrada nessa figura. Uma comparação cuidadosa das duas curvas indica que a frequência para o caso amortecido é menor (isto é, que o período é maior), que aquela para o caso não amortecido. A razão das amplitudes de oscilação para dois máximos sucessivos é

$$\frac{A e^{-\beta T}}{A e^{-\beta(T+\tau)}} = e^{\beta \tau} \quad (7.36)$$

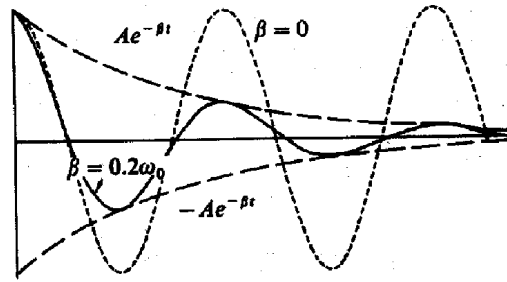


Figura 7.7: Curvas Envelope e Deslocamento.

onde o primeiro de qualquer par de máximos ocorre em $t = T$ e $\tau_1 = 2\pi/\omega_1$.

A quantidade $e^{\beta\tau_1}$ é chamada INCREMENTO do movimento; o logaritmo de $e^{\beta\tau_1}$, isto é, $\beta\tau_1$, é conhecido como o INCREMENTO LOGARÍTMICO do movimento.

Ao contrário do Oscilador Harmônico Simples, a energia do oscilador amortecido não é constante no tempo; a energia é continuamente cedida ao meio amortecedor e dissipada na forma de calor (ou, talvez, como radiação). A taxa de energia perdida é proporcional ao quadrado da velocidade, de modo que o decréscimo de energia ocorre uniformemente. A taxa de perda terá um máximo quando a partícula atinge sua velocidade máxima, que ocorre próximo (mas não exatamente) da posição de equilíbrio, e anula-se instantaneamente quando a partícula está na amplitude máxima e tem velocidade zero.

A Figura (7.8) mostra a Energia Total e a taxa de perda de Energia para o oscilador

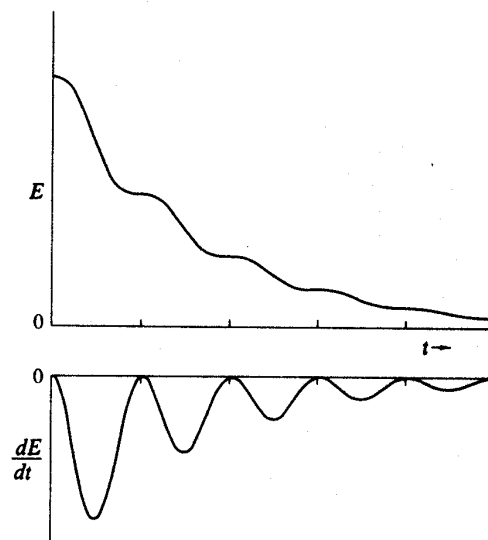


Figura 7.8: Oscilador Amortecido: Energia Total e Taxa de perda de Energia.

amortecido.

EXEMPLO 01: Construa um diagrama de fase geral para o oscilador amortecido.

Resolução:

As expressões para o deslocamento e a velocidade são dadas por,

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \delta)$$

e,

$$\dot{x}(t) = -A e^{-\beta t} \beta \cos(\omega_1 t - \delta) + A e^{-\beta t} (-\omega_1) \sin(\omega_1 t - \delta)$$

ou seja,

$$\dot{x}(t) = -A e^{-\beta t} (\beta \cos(\omega_1 t - \delta) + \omega_1 \sin(\omega_1 t - \delta))$$

Essas equações podem ser convertidas em uma forma mais elaborada, introduzindo uma mudança de variáveis de acordo com as seguintes transformações lineares: $u = \omega_1 x$ e $\omega = \beta x + \dot{x}$

Então,

$$\begin{cases} u = \omega_1 A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \delta) \\ \omega = -\omega_1 A e^{-\beta t} \sin(\omega_1 t - \delta) \end{cases}$$

Se representarmos u e ω em coordenadas polares, conforme mostra a Figura (7.9) então,

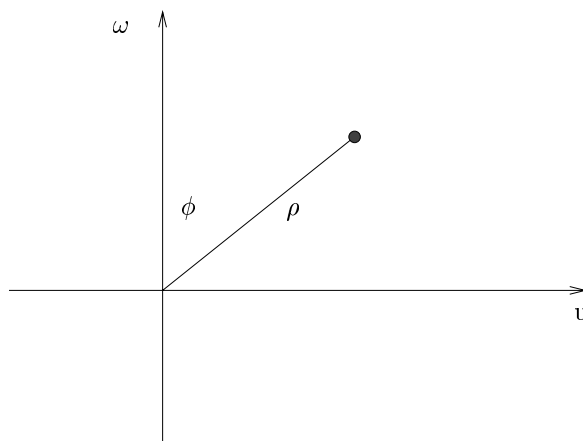
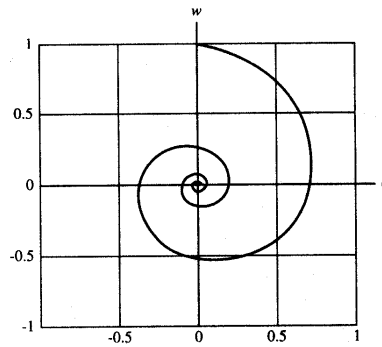
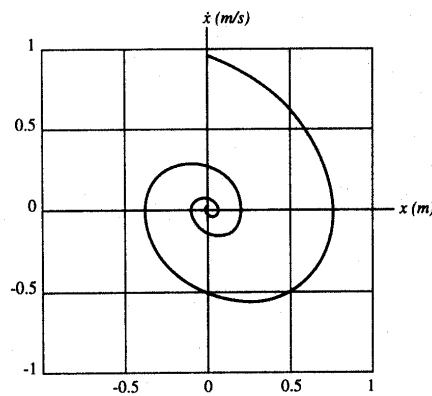


Figura 7.9: Coordenadas Polares.

$$\begin{cases} \rho = (u^2 + \omega^2)^{1/2} \\ \phi = \omega_1 t \end{cases}$$

Assim, $\rho = \omega_1 A e^{-\beta/\omega_1 \phi}$, que é a equação de uma espiral logarítmica.

Como a transformação de x e \dot{x} para u e ω é linear, o caminho de fase tem basicamente a mesma forma no plano $u - \omega$ e no plano $x - \dot{x}$ como mostram as Figuras (7.10) e (7.11)

Figura 7.10: O plano $u - \omega$.Figura 7.11: O plano $x - \dot{x}$.

7.5.2 Movimento Criticamente Amortecido

O caso criticamente amortecido ocorre quando β^2 é exatamente igual a ω^2 .

Assim, $r_1 = r_2 = -\beta$.

Então,

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\beta t} \quad (7.37)$$

Para um dado conjunto de condições iniciais, um oscilador criticamente amortecido aproxima-se do equilíbrio a uma taxa mais rápida que aquela para os osciladores super-amortecido ou sub-amortecido. Isso é importante em certos sistemas oscilatórios práticos (por ex., galvanômetros), quando o sistema deve retornar ao equilíbrio o mais rapidamente possível.

7.5.3 Movimento Super-Amortecido

Se o parâmetro de amortecimento β for muito maior que ω_0 , então o super-amortecimento acontece. Porque $\beta^2 > \omega_0^2$, as exponenciais na Equação (7.32) são reais, isto é,

$$x(t) = e^{-\beta t} \left(A_1 e^{\omega_2 t} + A_2 e^{-\omega_2 t} \right) \quad (7.38)$$

onde, $\omega_2 = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$.

Observe que ω_2 NÃO representa uma freqüência angular, porque o movimento NÃO é periódico. O deslocamento aproxima-se assintoticamente da posição de equilíbrio como mostra a Figura (??).

O super-amortecimento resulta num decréscimo da amplitude até zero que pode ter alguns comportamentos singulares como mostrado no diagrama de espaço de fase da Figura (7.12).

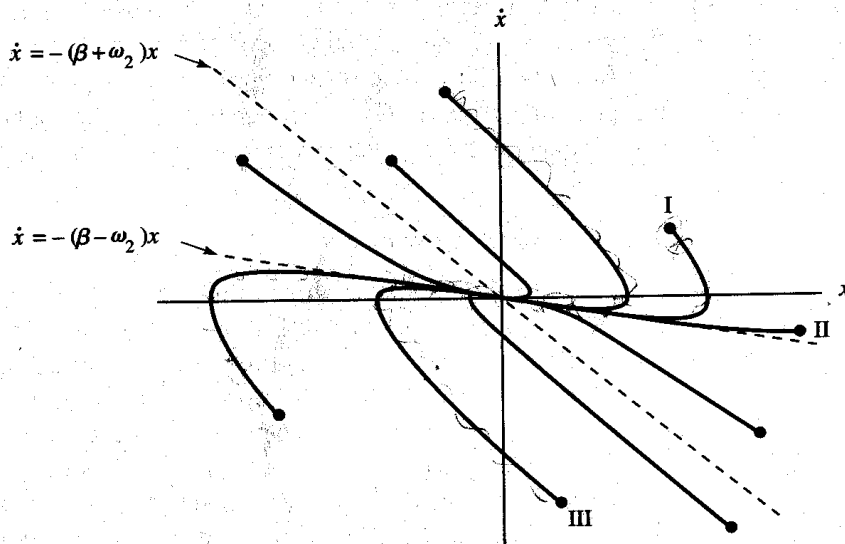


Figura 7.12: Diagrama de Espaço de Fase.

Observe que para todos os caminhos de fase das posições iniciais mostrados, os caminhos assintóticos para tempos mais longos são ao longo da curva tracejada $\dot{x} = -(\beta - \omega_2)x$. Apenas um caso especial tem um caminho de fase ao longo da outra curva tracejada. Dependendo dos valores iniciais da posição e da velocidade, uma mudança no sinal de ambos, x e \dot{x} pode ocorrer; por exemplo, veja o caminho de fase III na Figura (7.12).

A Figura (7.13) representa x e \dot{x} como uma função do tempo para os três caminhos de fase, I, II e III da Figura (7.12). Todos os três casos tem deslocamentos iniciais positivos, $x(0) = x_0 > 0$. Cada um dos três caminhos de fase tem comportamento interessante dependendo do valor inicial, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, da velocidade:

I) $\dot{x}_0 > 0$, de modo que $x(t)$ atinge um máximo para algum $t > 0$ antes de aproximar-se de zero. A velocidade \dot{x} decresce, torna-se negativa, e então aproxima-se de zero.

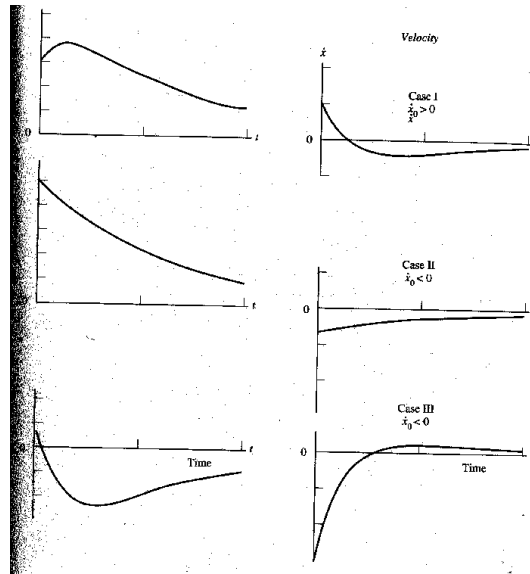


Figura 7.13: Deslocamento e Velocidade como funções do tempo.

II) $\dot{x}_0 < 0$, com $x(t)$ e $\dot{x}(t)$ monotonicamente aproximando-se de zero.

III) $\dot{x}_0 < 0$, mas abaixo da curva $\dot{x} = -(\beta + \omega_2)x$, que $x(t)$ será negativo antes se aproximando de zero, e $\dot{x}(t)$ sendo positivo antes aproximando-se de zero. O movimento nesse caso pode ser considerado oscilatório.

Os pontos iniciais situados entre as duas curvas tracejadas na Figura (7.12) parece ter caminhos de fase decrescendo monotonicamente à zero, visto que aqueles situados do lado de fora daquelas duas linhas não. Amortecimento crítico tem caminhos de fase similar às curvas do super-amortecimento mostrado na Figura (7.12), ao contrário dos caminhos espirais da Figura (7.14).

EXEMPLO 02: Considere um pêndulo de comprimento l e uma massa m na sua extremidade, como mostra a Figura (7.14), movendo-se através de óleo com θ decrescendo.

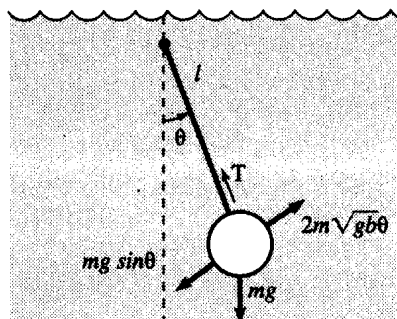


Figura 7.14: Exemplo 02 - Pêndulo Simples.

A massa m sofre pequenas oscilações, mas o óleo retarda o movimento da massa m com

uma força resistiva proporcional à velocidade dada por $F_r = 2m\sqrt{g/l}l\dot{\theta}$. A massa m está inicialmente “puxada para trás” em $t = 0$ com $\theta = \alpha$ e $\dot{\theta} = 0$. Encontre o deslocamento angular θ e a velocidade $\dot{\theta}$ como funções do tempo.

Resolução:

$$F = ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - 2m\sqrt{\frac{g}{l}}l\dot{\theta}$$

$$l\ddot{\theta} + g\sin\theta + 2\sqrt{\frac{g}{l}}l\dot{\theta} = 0$$

Para pequenas oscilações, $\sin\theta \equiv \theta$. Logo,

$$\ddot{\theta} + 2\sqrt{\frac{g}{l}}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \quad (7.39)$$

Comparando as Equações (7.39) e (7.30) obtemos que $\omega_o^2 = g/l$, e $\beta^2 = g/l$. Portanto, $\omega_o^2 = \beta^2$ e o pêndulo é criticamente amortecido. Após ter sido inicialmente puxado para trás e liberado, o pêndulo acelera e então desacelera quando θ vai a zero. O pêndulo move-se apenas em uma direção e retorna à sua posição de equilíbrio.

A solução da Equação (7.39) é a Equação (7.37). Podemos determinar os valores de A e B substituindo a Equação (7.37) na Equação (7.39) e usando as condições iniciais, isto é,

$$\theta(t) = (A + Bt)e^{-\beta t}$$

$$\dot{\theta}(t) = Be^{-\beta t} - \beta(A + Bt)e^{-\beta t}$$

Para $t = 0$, $\theta(t=0) = \alpha = A$ e $\dot{\theta}(t=0) = 0 = B - \beta A$. Assim, $B = \alpha\beta$.

Temos então que,

$$\begin{cases} \theta(t) = \alpha \left(1 + \sqrt{\frac{g}{l}}t\right) e^{-\sqrt{g/l}t} \\ \dot{\theta}(t) = -\frac{\alpha g}{l}te^{-\sqrt{g/l}t} \end{cases}$$

7.6 Forças Motrizes Senoidais

O caso mais simples de oscilação forçada é aquela em que uma força motriz externa variando harmonicamente com o tempo é aplicada ao oscilador. A força total sobre a partícula é então,

$$F = -kx - b\dot{x} + F_o \cos\omega t \quad (7.40)$$

onde consideramos uma força restauradora linear e uma força de amortecimento viscosa em adição à força motriz. A equação do movimento torna-se,

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_o \cos\omega t \quad (7.41)$$

ou, usando a notação adotada anteriormente,

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = A \cos \omega t \quad (7.42)$$

onde $A = F_0/m$ e ω é a frequência angular da força motriz. A solução da Equação (7.42) consiste de duas partes, uma função complementar (que é a solução da homogênea associada) $x_h(t)$, que é a solução da Equação (7.42) com o lado direito igual a zero, e uma solução particular $x_p(t)$, que reproduz o lado direito. A solução complementar é,

$$x(t) = e^{-\beta t} [A_1 e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + A_2 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t}]. \quad (7.43)$$

Para a solução particular, tentaremos

$$x_p(t) = D \cos(\omega t - \delta) \quad (7.44)$$

Substituindo a Equação (7.44) na Equação (7.42), considerando que,

$$\begin{cases} \dot{x}_p(t) = -D\omega \sin(\omega t - \delta) \\ \ddot{x}_p(t) = -D\omega^2 \cos(\omega t - \delta) \end{cases}$$

Então,

$$-D\omega^2 \cos(\omega t - \delta) - 2\beta D\omega \sin(\omega t - \delta) + \omega_0^2 D \cos(\omega t - \delta) = A \cos \omega t$$

ou seja,

$$(-D\omega^2 + \omega_0^2 D) \cos(\omega t - \delta) - 2\beta D\omega \sin(\omega t - \delta) = A \cos \omega t$$

Considerando que,

$$\begin{cases} \cos(\omega t - \delta) = \cos \omega t \cos \delta + \sin \omega t \sin \delta \\ \sin(\omega t - \delta) = \sin \omega t \sin \delta - \cos \omega t \cos \delta \end{cases}$$

obtemos,

$$\begin{cases} D(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \delta + 2\beta D\omega \sin \delta = A \\ D(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \delta - 2\beta D\omega \cos \delta = 0 \end{cases} \quad (7.45)$$

Resolvendo o sistema de Equações (7.45), temos,

$$D(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \delta = 2\beta D\omega \cos \delta \implies \tan \delta = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Usando a equação fundamental da trigonometria, $\sin^2 \delta + \cos^2 \delta = 1$, encontramos que,

$$\begin{cases} \sin \delta = \frac{2\beta\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \\ \cos \delta = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \end{cases} \quad (7.46)$$

Portanto,

$$D = \frac{A}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \quad (7.47)$$

e a solução particular é dada por,

$$x_p(t) = \frac{A}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos(\omega t - \delta) \quad (7.48)$$

com,

$$\tan \delta = \frac{2\beta\omega}{\omega_o^2 - \omega^2} \quad (7.49)$$

A quantidade δ representa a diferença de fase entre a força motriz e o movimento resultante; um atraso real ocorre entre a ação da força motriz e a resposta do sistema. Para um dado ω_o , quando ω cresce, de $\omega = 0$ até $\omega = \omega_o$, a fase aumenta de $\delta = 0$ até $\delta = \pi/2$ e, a fase atinge o valor de π , quando $\omega \rightarrow \infty$. A variação de δ com ω será mostrada mais adiante na Figura (7.16)

A solução geral é

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

O termo $x_h(t)$ representa os EFEITOS TRANSIENTES, isto é, os efeitos que se extinguem, e os termos contidos nessa solução desaparecem com o tempo devido ao fator $e^{-\beta t}$. O termo $x_p(t)$ representa os efeitos de ESTADO ESTACIONÁRIO e contém todas as informações para t longos comparados com $1/\beta$. Assim, $x(t \gg 1/\beta) = x_p(t)$.

A solução de Estado Estacionário é importante em muitas aplicações e problemas que serão discutidos na próxima seção.

Os detalhes do movimento durante o período antes dos efeitos transientes terem desaparecidos, isto é, $t \leq 1/\beta$, depende fortemente das condições do oscilador no instante em que a força motriz é aplicada e também da magnitude relativa da frequência da força motriz ω e da frequência amortecida $\sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}$ no caso dos osciladores subamortecido e não forçado. Isso pode ser mostrado por cálculo numérico de $x_p(t)$, $x_h(t)$, e a soma para diferentes valores de β e ω . As Figuras (7.15) ilustram o movimento transiente de um oscilador subamortecido quando frequências motrizes menores e maiores que $\omega_1 = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}$ são aplicadas.

Se $\omega < \omega_1$, a resposta transiente do oscilador distorce bastante a forma senoidal da função força motriz durante o intervalo de tempo imediatamente após a aplicação da força motriz, como mostra o gráfico da esquerda da Figura (7.15).

Se $\omega > \omega_1$, o efeito é uma modulação da função força com pequena distorção das oscilações senoidais de alta frequência, como mostra o gráfico da direita da Figura (7.15) A solução de Estado Estacionário (x_p) é largamente estudada em muitos problemas e aplicações, como será mostrado em seções futuras. Os efeitos transientes (x_p), embora talvez como importância total, deve ser entendido e levado em conta especialmente em certos tipos de circuitos elétricos.

FENÔMENO DA RESSONÂNCIA

Para encontrar a frequência angular ω_R para a qual a amplitude D é um máximo, isto é, a frequência da amplitude ressonante, calculemos

$$\left. \frac{dD}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_R} = 0$$

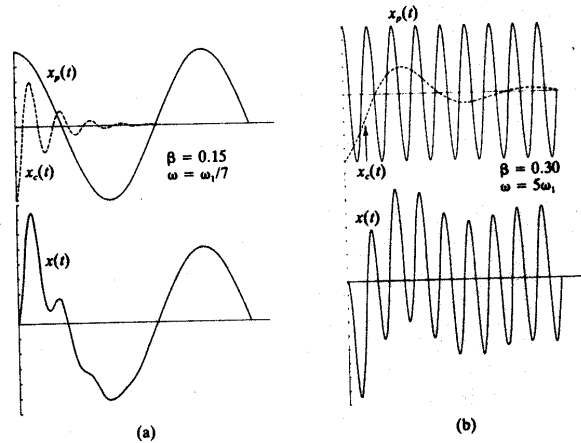


Figura 7.15: Movimento Transiente de um oscilador forçado - (a) $\beta = 0,15$ e $\omega = \omega_1/7$; (b) $\beta = 0,30$ e $\omega = 5\omega_1$

Como

$$D = \frac{A}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}$$

Assim,

$$\frac{dD}{d\omega} = \frac{4\omega(\omega_o^2 - \omega) + 8\omega\beta^2}{[(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2]^2} = 0 \implies \omega_R = \sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2} \quad (7.50)$$

Portanto, a frequência de ressonância ω_R decresce quando o coeficiente de amortecimento β cresce. Nenhuma ressonância ocorre se $\beta^2 > \frac{\omega_o^2}{2}$, porque então ω_R é imaginária e D decresce monotonicamente quando ω cresce.

Podemos agora comparar as frequências de oscilação para os vários casos que temos considerado:

- I) Oscilações livres, sem amortecimento - $\omega_o^2 = k/m$
- II) Oscilações livres, amortecidas - $\omega_1^2 = \omega_o^2 - \beta^2$
- III) Oscilações forçadas amortecidas - $\omega_R = \omega_o^2 - 2\beta^2$.

Observamos que $\omega_o > \omega_1 > \omega_R$.

Geralmente descrevemos o grau de amortecimento em um sistema oscilante em termos do “FATOR DE QUALIDADE”, Q , do sistema:

$$Q \equiv \frac{\omega_R}{2\beta} \quad (7.51)$$

Se o amortecimento é pequeno, então Q é muito grande e a forma da curva de ressonância aproxima-se daquela de um oscilador não amortecido. Mas a ressonância pode ser completamente destruída se o amortecimento é grande e Q é muito pequeno. A Figura (7.16) mostra as curvas de ressonância e de fase para vários valores de Q . Essas curvas indicam o rebaixamento da frequência de ressonância com um decréscimo em Q , isto é, com um aumento do coeficiente de amortecimento, β .

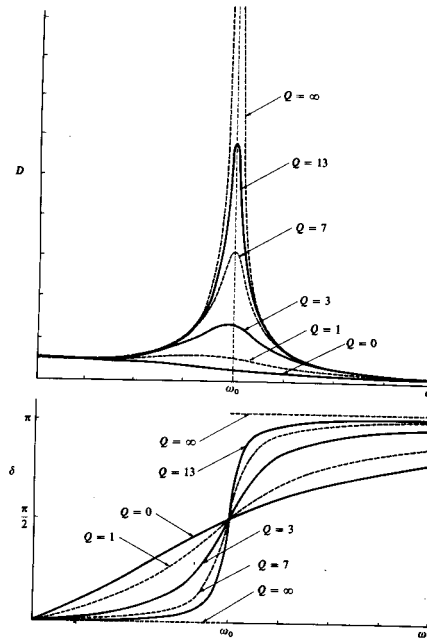


Figura 7.16: Variação de δ com ω .

O efeito não é grande, contudo, a mudança de frequência é menos que 3 % mesmo para Q tão pequeno quanto 3 e é cerca de 18 % para $Q = 1$.

Para um oscilador ligeiramente amortecido, podemos mostrar que $Q \approx \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$, onde $\Delta\omega$ representa o intervalo de frequência entre os pontos sobre a curva de ressonância tais que são $1/\sqrt{2} = 0,707$ da amplitude máxima.

Os valores de Q encontrados em situações físicas reais variam bastante. Em muitos sistemas mecânicos ordinários, por exemplo, alto falantes, os valores podem estar na faixa de até 100. Osciladores de cristal de quartzo ou diapasons podem ter o valor de Q de 10^4 . Circuitos elétricos altamente afinados, incluindo cavidades ressonantes, podem ter valores de Q de 10^4 à 10^5 . Podemos também definir o valor de Q para alguns sistemas atômicos. De acordo com a visão clássica, a oscilação dos elétrons no átomo leva à radiação óptica. A agudeza das linhas espectrais é limitada pelo amortecimento devido à perda de energia por radiação (amortecimento de radiação). A largura mínima de uma linha pode ser calculada classicamente e $\Delta\omega \approx 2 \cdot 10^{-8} \omega$. O Q desse oscilador é portanto aproximadamente $5 \cdot 10^7$. Ressonâncias conhecidas, com valores de Q maiores que esse, ocorrem em radiação de lasers de gás. Medidas com tais dispositivos tem fornecido valores de Q de aproximadamente 10^{14} .

A Equação (7.50) dá a frequência para a amplitude de ressonância. Agora calcularemos a frequência para a ressonância da Energia Cinética - isto é, o valor de ω para o qual a Energia Cinética T é um máximo. A Energia Cinética é dada por $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$, e computando \dot{x} da Equação (7.48), temos

$$\dot{x} = -\frac{A\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}} \sin(\omega t - \delta)$$

e assim, a Energia Cinética torna-se

$$T = \frac{m A}{2} \frac{\omega^2}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \beta^2} \sin^2(\omega t - \delta) \quad (7.52)$$

Para obter um valor de T independente do tempo, calculemos a média de T sobre um período completo de oscilação, ou seja,

$$\langle T \rangle = \frac{m A^2}{2} \frac{\omega^2}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \beta^2} \langle \sin^2(\omega t - \delta) \rangle \quad (7.53)$$

O valor médio do quadrado da função seno tomada sobre um período é,

$$\langle \sin^2(\omega t - \delta) \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2(\omega t - \delta) dt = \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{2\pi/\omega} [1 - \cos 2(\omega t - \delta)] dt$$

$$\langle \sin^2(\omega t - \delta) \rangle = \frac{\omega}{4\pi} \left[\frac{2\pi}{\omega} - \frac{1}{2\omega} (\sin 2\delta - \sin 2\delta) \right]$$

e assim,

$$\langle \sin^2(\omega t - \delta) \rangle = \frac{1}{2} \quad (7.54)$$

Portanto,

$$\langle T \rangle = \frac{m A^2}{4} \frac{\omega^2}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \beta^2} \quad (7.55)$$

O valor de ω para $\langle T \rangle$ ser máximo é denominado de ω_E e é obtido de

$$\left. \frac{d\langle T \rangle}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_E} = 0 \quad (7.56)$$

Diferenciando a Equação (7.55), temos

$$\frac{d\langle T \rangle}{d\omega} = \frac{m A^2}{4} \left[\frac{[(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \beta^2] 2\omega - \omega^2 [2(\omega_o^2 - \omega^2)(-2\omega) + 8\omega \beta^2]}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \beta^2} \right]$$

assim,

$$\left. \frac{d\langle T \rangle}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_E} = 0 \implies (\omega_o^2 - \omega_E^2)^2 \omega_E + 2\omega_E^3 (\omega_o^2 - \omega_E^2) = 0 \implies \omega_E = \omega_o$$

Portanto, a ressonância da Energia Cinética ocorre na frequência natural do sistema para oscilações não amortecidas.

Vemos então que a amplitude de ressonância ocorre a uma frequência $\omega_R = \sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2}$, enquanto a ressonância da Energia Cinética ocorre para $\omega_E = \omega_o$. Como a Energia Potencial é proporcional ao quadrado da amplitude, a ressonância da Energia Potencial deve também ocorrer em $\sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2}$. Essas ressonâncias das Energias Cinética e Potencial à diferentes frequências é um resultado do fato que o oscilador amortecido não é um sistema conservativo. A energia é continuamente trocada com o mecanismo motriz, e energia está sendo transferida para o meio amortecedor.

7.7 Sistemas Físicos

Dissemos na introdução desse capítulo que oscilações lineares aplicam-se à maioria dos sistemas que apresentem pequenas oscilações como o sistema massa-mola e do pêndulo simples. O mesmo formalismo aplica-se à maioria dos sistemas físicos. Sistemas mecânicos incluem o pêndulo de torção, corda vibrante ou membrana, e vibrações elásticas de barras ou placas. Esses sistemas podem ter sobretons, e cada um deles pode ser tratado da mesma maneira que na discussão precedente.

Podemos aplicar nosso sistema mecânico analogamente aos sistemas acústicos. Nesse caso, as moléculas de ar vibram. Podemos ter ressonâncias que dependem das propriedades e dimensões do meio. Vários fatores causam o amortecimento, incluindo fricção e radiação de onda sonora. A força motriz pode ser um diapasão ou corda vibrante, entre muitas fontes sonoras.

Sistemas atômicos podem também ser representados classicamente como oscilações lineares. Quando a luz (consistindo de radiação eletromagnética de alta frequência) cai sobre a matéria, provoca a vibração dos átomos e moléculas. Quando luz tendo uma das frequências ressonantes do sistema atômico ou molecular cai sobre o material, energia eletromagnética é absorvida, fazendo com que os átomos ou moléculas vibrem com grande amplitude. Grandes campos eletromagnéticos de mesma frequência são produzidos por cargas elétricas oscilantes. Ondas mecânicas (ou mecânica quântica) usam a teoria linear da oscilação para explicar muitos dos fenômenos associados com absorção, dispersão e radiação luminosa.

Mesmo para descrever núcleos, a teoria linear da oscilação é usada. Um dos modos de excitação do núcleo é a excitação coletiva. Neutrons e prótons vibram em vários movimentos coletivos. Ressonâncias ocorrem e amortecimento existe. A analogia com a Mecânica Clássica é muito útil para descrever o movimento.

Circuitos elétricos são, contudo, os exemplos mais observados de oscilações não-mecânicas. Na verdade, por causa de sua grande importância prática, o exemplo elétrico tem sido minuciosamente investigado e a situação é frequentemente invertida, e vibrações mecânicas são analisadas em termos do “circuito elétrico equivalente”. Circuitos elétricos são tão importantes que dedicamos uma seção inteira para compará-los com seus análogos mecânicos.

7.8 Oscilações Elétricas

Considere o oscilador mecânico simples mostrado no lado esquerdo da Figura (7.17) onde a massa m escorrega sobre uma plataforma sem atrito. Sabemos que a equação do movimento é

$$m \ddot{x} + k x = 0 \quad (7.57)$$

e que a frequência de oscilação é dada por

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (7.58)$$

Agora consideremos o circuito elétrico mostrado no lado direito da Figura (7.17)

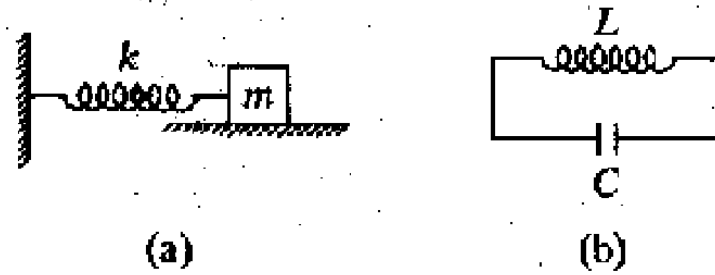


Figura 7.17: (a) Oscilador Mecânico Simples e (b) Circuito Elétrico LC.

Para algum instante t , a carga no capacitor C é $q(t)$, e a corrente fluindo através do indutor L é $I(t) = \dot{q}(t)$. Aplicando a EQUAÇÃO de KIRCHHOFF para esse circuito para a queda de voltagem ao redor do circuito, temos

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int I dt = 0$$

ou, em termos de q ,

$$L \ddot{q} + \frac{q}{C} = 0 \quad (7.59)$$

Essa equação é exatamente da mesma forma da Equação (7.57); portanto, a solução é

$$q(t) = q_o \cos \omega_o t \quad (7.60)$$

onde a frequência é $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ e onde colocamos a fase inicial igual a zero por considerar que $q(t=0) = q_o$ e $I(t=0) = 0$.

Comparando os termos nas Equações (7.57) e (7.59), vemos que o análogo elétrico da massa (ou inércia) é a INDUTÂNCIA, e a recíproca da constante da mola k , é relacionada com a CAPACITÂNCIA C . Assim, temos

$$m \rightarrow L ; x \rightarrow q ; 1/k \rightarrow C ; \dot{x} \rightarrow I$$

Diferenciando a expressão para $q(t)$, encontramos

$$\dot{q}(t) = I(t) = -\omega_o q_o \sin \omega_o t \quad (7.61)$$

Elevando $q(t)$ e $I(t)$, ao quadrado, podemos escrever

$$\left\{ \begin{array}{l} I^2 = \omega_o^2 q_o^2 \sin^2 \omega_o t \implies \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} L \omega_o^2 q_o^2 \sin^2 \omega_o t \\ q^2 = q_o^2 \cos^2 \omega_o t \implies \frac{1}{2} L \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{q_o^2}{C} \cos^2 \omega_o t \end{array} \right. \quad (7.62)$$

Logo,

$$\frac{1}{2} L I^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} L \omega_o^2 q_o^2 \sin^2 \omega_o t + \frac{1}{2} \frac{q_o^2}{C} \cos^2 \omega_o t = \frac{q_o^2}{2C} (\sin^2 \omega_o t + \cos^2 \omega_o t)$$

e assim,

$$\frac{1}{2} L I^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{q_0^2}{2C} = cte \quad (7.63)$$

O termo $\frac{1}{2} L I^2$, representa a energia armazenada no indutor L e corresponde à Energia Cinética Mecânica, enquanto o termo $\frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$, representa a energia armazenada no capacitor C e corresponde à Energia Potencial Mecânica. A soma dessas duas energias é constante, indicando que o sistema é conservativo. Vemos adiante que um circuito elétrico pode ser conservativo só se não contém resistência.

A combinação massa-mola ilustrada na Figura (7.18) difere daquela da Figura (7.17)

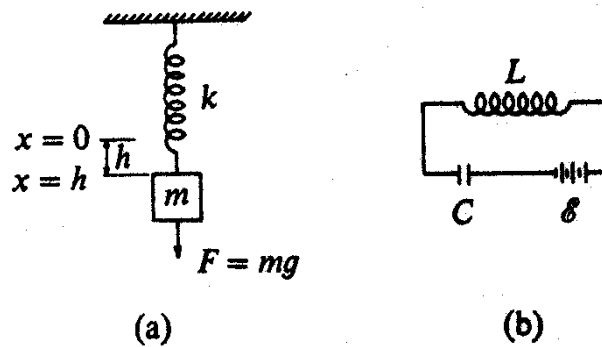


Figura 7.18: (a) Sistema massa-mola e (b) Circuito LC.

pela adição de uma constante de força devido ao peso da massa: $F_1 = m g$. Sem essa força gravitacional, a posição de equilíbrio estará em $x = 0$; a adição da força distende a mola por uma quantidade $h = m g/k$ e desloca a posição de equilíbrio para $x = h$. Portanto, a equação do movimento é exatamente a Equação (7.57) com x sendo substituído por $x - h$, ou seja,

$$m \ddot{x} + k x = k h \quad (7.64)$$

com solução dada por,

$$x(t) = h + A \cos \omega_0 t \quad (7.65)$$

onde escolhemos as condições iniciais $x(t=0) = h + A$ e $\dot{x}(t=0) = 0$.

No circuito do lado direito da Figura (7.17) adicionamos uma bateria, com força eletromotriz ϵ , transformando-o no circuito elétrico do lado direito da Figura (7.18).

A Equação de Kirchhoff agora torna-se

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int I dt = \epsilon = \frac{q_1}{C} \quad (7.66)$$

onde, q_1 representa a carga que deve ser aplicada à C para produzir uma voltagem ϵ . Usando $I = \dot{q}$, temos

$$L \ddot{q} + \frac{q}{C} = \frac{q_1}{C} \quad (7.67)$$

Se $q = q_o$ e $I = 0$ para $t = 0$, a solução é:

Homogênea Associada:

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC} = 0 \implies m^2 + \frac{1}{LC} = 0 \implies m = \pm i \sqrt{\frac{1}{LC}} = \pm i \omega_o.$$

Assim,

$$q_h(t) = A \cos \omega_o t + B \sin \omega_o t.$$

A solução particular é do tipo, $q_p = D \implies \dot{q}_p = \ddot{q}_p = 0 \implies D = q_1$.

Portanto, a solução geral, isto é,

$$q(t) = q_h(t) + q_p(t)$$

pode ser escrita como,

$$q(t) = A \cos \omega_o t + B \sin \omega_o t + q_1.$$

Usando as condições iniciais $t = 0 \implies q = q_o$ e $\dot{q}(0) = 0$, obtemos

$$A = q_o - q_1 \quad \text{e} \quad B = 0.$$

Então,

$$q(t) = (q_o - q_1) \cos \omega_o t + q_1 \quad (7.68)$$

que é exatamente o análogo mecânico da Equação (7.65).

A adição do amortecimento para o oscilador mecânico mecânico da Figura (7.17) pode ser representado por um “pote de líquido” contendo algum fluido viscoso, como na Figura (7.19). A equação do movimento é $m \ddot{x} + b \dot{x} + kx = 0$

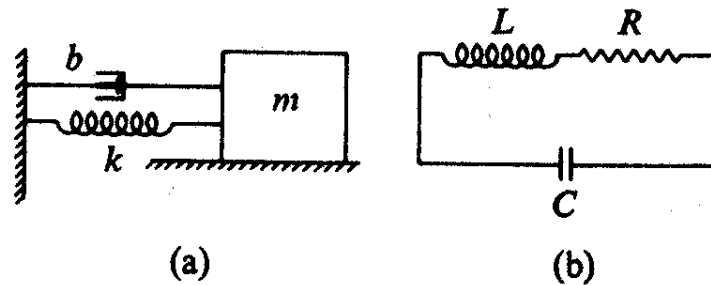


Figura 7.19: Oscilador Mecânico com amortecimento.

A Equação de Kirchhoff para o circuito elétrico análogo ao da Figura (7.19) é,

$$L \ddot{q} + R \dot{q} + \frac{q}{C} = 0$$

de modo que a resistência elétrica R corresponde à resistência de amortecimento mecânico b . A analogia entre as quantidades mecânicas e elétricas podem ser resumidas como na Tabela 1. Por exemplo, a Massa em um sistema mecânico é análogo à Indutância em um sistema elétrico.

Por causa da natureza recíproca da correspondência entre o inverso da constante elástica mecânica e a capacitância elétrica, a adição de molas e capacitores para sistemas deve ser

Mecânico	Elétrico
x Deslocamento	q Carga
\dot{x} Velocidade	$\dot{q} = I$ Corrente
m Massa	L Indutância
b Resistência de amortecimento	R Resistência
$1/k$ Inverso da constante de força	C Capacitância
F Amplitude da força imprimida	ϵ Amplitude da Força Eletromotriz imprimida

feita de maneira diferente para produzir os mesmos efeitos. Por exemplo, considere a massa da primeira figura da Figura (7.20) onde duas molas estão associadas em série. Se uma força

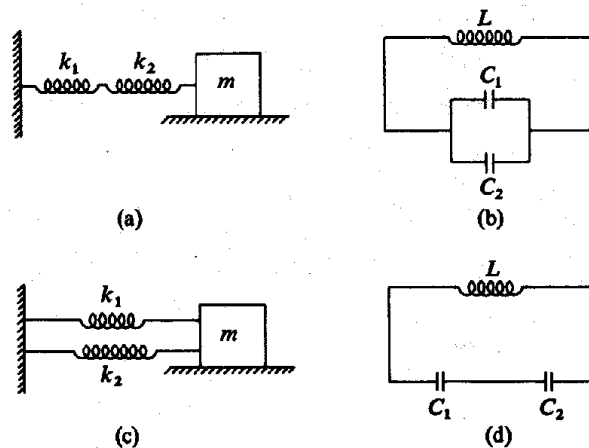


Figura 7.20: Associação de duas molas: (a) em série e (c) em paralelo. Associação de dois capacitores: (b) em paralelo e (d) em série.

F é aplicada à massa m , a mola 1 distenderá uma quantidade $x_1 = F/k_1$, enquanto a mola 2 distenderá uma quantidade $x_2 = F/k_2$. A distensão total será

$$x = x_1 + x_2 = F(1/k_1 + 1/k_2) \quad (7.69)$$

O análogo elétrico dessa equação é, $q = \epsilon(C_1 + C_2)$.

Assim, molas atuando EM SÉRIE, são equivalentes à CAPACITORES atuando EM PARALELO. Analogamente, molas EM PARALELO, operam da mesma maneira que capacitores EM SÉRIE.

Se substituirmos a bateria na Figura (7.18) com um gerador AC, ocorre o caso do oscilador elétrico forçado. Muitos dos termos usados para descrever circuitos AC tais como, impedância, reatância, indutância, ângulos de fase, dissipação de potência, largura de banda, etc, podem ser aplicados para outros sistemas de osciladores lineares. A importância da analogia com circuitos elétricos é a facilidade com que os circuitos elétricos podem ser usados para testar análogos mecânicos e outros.

EXEMPLO 03: Considere um circuito em série R-L-C forçado por uma força eletromotriz alternada de valor $E_o \sin \omega t$. Encontre a corrente, a voltagem V_L através do indutor, e a frequência ω para que V_L seja máxima.

Resolução:

Temos que

$$L \ddot{q} + R \dot{q} + \frac{q}{C} = E_o \sin \omega t \implies \ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{q}{LC} = \frac{E_o}{L} \sin \omega t$$

Se considerarmos as relações da tabela 1 e considerando que

$$\begin{cases} \beta = b/2m \rightarrow R/2L \\ \omega_o = \sqrt{k/m} \rightarrow 1/\sqrt{LC} \\ A = F_o/m \rightarrow E_o/L \end{cases} \quad (7.70)$$

a solução para a carga q é dada pela Equação (7.48), isto é,

$$q_p(t) = \frac{E_o/L}{\sqrt{(1/LC - \omega^2)^2 + 4(\omega^2 R^2)/(4L^2)}} \cos(\omega t - \delta)$$

Logo,

$$I = \dot{q}_p(t) = -\frac{\omega E_o/L}{\sqrt{R^2 \omega^2/L^2 + (1/LC - \omega^2)^2}} \sin(\omega t - \delta) = -\frac{E_o}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C - \omega L)^2}} \sin(\omega t - \delta)$$

onde δ pode ser encontrado pela Equação (7.49), ou seja,

$$\delta = \arctan\left(\frac{\omega R}{L(1/LC - \omega^2)}\right) \implies \delta = \arctan\left(\frac{R}{1/\omega C - \omega L}\right)$$

A voltagem através do indutor é encontrada da derivada temporal da corrente,

$$V_L = L \frac{dI}{dt} = L \frac{-\omega E_o}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C - \omega L)^2}} \cos(\omega t - \delta).$$

Assim,

$$V_L = \frac{-\omega L E_o}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C - \omega L)^2}} \cos(\omega t - \delta) \implies V_L = V(\omega) \cos(\omega t - \delta).$$

Para encontrar a frequência motora ω_{max} que faz V_L um máximo, devemos tomar a derivada de V_L com relação a ω e igualar o resultado a zero. Precisamos apenas considerar a amplitude $V(\omega)$ e não a dependência temporal, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{dV(\omega)}{d\omega} &= -L E_o \frac{d}{d\omega} \left[\omega \left(R^2 + (1/\omega C - \omega L)^2 \right)^{-1/2} \right] \\ &= -\frac{L E_o}{\left[R^2 + (1/\omega C - \omega L)^2 \right]^{3/2}} \left(R^2 + \frac{2}{\omega^2 C^2} - 2 \frac{L}{C} \right) \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{dV(\omega)}{d\omega} = 0 \implies R^2 + \frac{2}{\omega_m^2 C^2} - 2 \frac{L}{C} = 0 \implies \omega_m = \frac{1}{\sqrt{LC - \frac{R^2 C^2}{2}}}$$

que é o resultado que precisamos.

Observe a diferença entre essa frequência e aquela dada pela frequência natural, $\omega_o = 1/LC$, e a frequência da ressonância de carga, dada pela equação transcrita da Equação (7.50), $\omega_R = \sqrt{1/LC - 2R^2/L^2}$.

7.9 Princípio da Superposição - Série de Fourier

As oscilações que temos discutido até agora, obedece a Equações diferenciais da forma,

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + a \frac{d}{dt} + b\right) x(t) = A \cos \omega t \quad (7.71)$$

A quantidade entre parênteses no lado esquerdo é um OPERADOR LINEAR, que pode ser representado por L . Se generalizarmos a função dependente do tempo no lado direito, podemos escrever a equação do movimento como,

$$L x(t) = F(t) \quad (7.72)$$

Uma propriedade importante dos operadores lineares é que eles obedecem o PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO. Essa propriedade resulta do fato que operadores lineares são distributivos, isto é,

$$L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2) \quad (7.73)$$

Portanto, se temos duas soluções, $x_1(t)$ e $x_2(t)$, para duas funções distintas $F_1(t)$ e $F_2(t)$,

$$L(x_1) = F_1(t) ; L(x_2) = F_2(t) \quad (7.74)$$

podemos adicionar estas equações, multiplicadas por constantes arbitrárias α_1 e α_2 , e obter,

$$L(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = L(\alpha_1 x_1) + L(\alpha_2 x_2) = \alpha_1 L(x_1) + \alpha_2 L(x_2) = \alpha_1 F_1(t) + \alpha_2 F_2(t) \quad (7.75)$$

Podemos estender este argumento a um conjunto de soluções $x_n(t)$, cada uma sendo apropriada para um dado $F_n(t)$:

$$L\left(\sum_{n=1}^N \alpha_n x_n(t)\right) = \sum_{n=1}^N \alpha_n F_n(t) \quad (7.76)$$

esta equação é exatamente a Equação (7.72), se identificarmos a combinação linear como,

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{n=1}^N \alpha_n x_n(t) \\ F(t) = \sum_{n=1}^N \alpha_n F_n(t) \end{cases} \quad (7.77)$$

Se cada uma das funções individuais $F_n(t)$ tem uma dependência harmônica com o tempo, tal como $\cos \omega_n t$, sabemos que a correspondente solução $x_n(t)$ é dada pela Equação (7.48). Assim, se $F(t)$ tem a forma,

$$F(t) = \sum_n \alpha_n \cos(\omega_n t - \phi_n)$$

A solução do Estado Estacionário é

$$x(t) = 1/m \sum_n \frac{\alpha_n}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega_n^2)^2 + 4\omega_n^2 \beta^2}} \cos(\omega_n t - \phi_n - \delta_n) \quad (7.78)$$

onde, $\delta_n = \arctan\left(\frac{2\omega_n \beta}{\omega_o^2 - \omega_n^2}\right)$.

Podemos escrever abaixo soluções similares onde $F(t)$ é representada por uma série de termos, $\sin(\omega_n t - \phi_n)$. Portanto chegamos a uma importante conclusão: se alguma função arbitrária $F(t)$ pode ser expressa como uma série, finita ou infinita, de termos harmônicos, a solução completa também pode ser usada como uma série similar de termos harmônicos. Esse é um resultado extremamente útil, porque, de acordo com o TEOREMA DE FOURIER, qualquer função periódica arbitrária, sujeita a certas condições que não são muito restritivas, pode ser representada por uma série de termos harmônicos. Assim, no caso físico comum em que $F(t)$ é periódica com período $\tau = 2\pi/\omega$,

$$F(t + \tau) = F(t) \quad (7.79)$$

temos então,

$$F(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (7.80)$$

onde os coeficientes a_n e b_n da série são dados por,

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} F(t') \cos n\omega t' dt' \\ b_n = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} F(t') \sin n\omega t' dt' \end{cases}$$

ou, porque $F(t)$ tem um período τ , podemos substituir os limites de integração 0 e τ , pelos limites $-1/2\tau = -\pi/\omega$ e $1/2\tau = \pi/\omega$, obtendo,

$$\begin{cases} a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} F(t') \cos n\omega t' dt' \\ b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} F(t') \sin n\omega t' dt' \end{cases} \quad (7.81)$$

Antes de discutirmos a resposta de sistemas amortecidos para funções arbitrárias, daremos um exemplo da representação de Fourier de funções periódicas.

EXEMPLO 04: Uma força dada pela função “dente de serra” é mostrada na Figura (7.21). Encontre os coeficientes a_n e b_n , e expresse $F(t)$ como uma Série de Fourier.

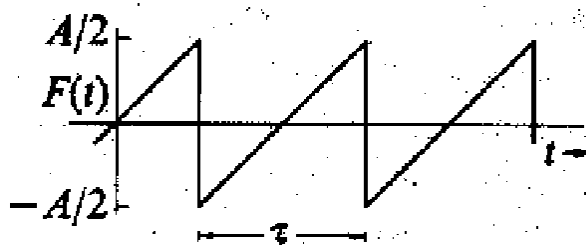


Figura 7.21: Exemplo 04 - Função “dente de serra”.

Resolução:

Nesse caso, $F(t)$ é uma função ímpar, $F(-t) = -F(t)$, e é expressa por,

$$F(t) = A \frac{t}{\tau} = \frac{\omega A}{2\pi} t; \quad -\tau/2 < t < \tau/2$$

Porque $F(t)$ é ímpar, os coeficientes a_n são todos nulos e os b_n são dados por

$$b_n = \frac{\omega^2 A}{2\pi^2} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} t' \sin n\omega t' dt'$$

Seja a integral

$$I = \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} t' \sin n\omega t' dt'$$

Vamos resolvê-la por partes, ou seja, consideremos a seguinte mudança de variáveis,

$$\begin{cases} u = t' \implies du = dt' \\ dv = \sin n\omega t' dt' \implies v = -\frac{1}{n\omega} \cos n\omega t' \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\omega^2 A}{2\pi^2} \left[-\frac{t'}{n\omega} \cos n\omega t' \Big|_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} + \frac{1}{n\omega} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \cos n\omega t' dt' \right] = \\ &= \frac{\omega^2 A}{2\pi^2} \left[-\frac{1}{n\omega} \left(\frac{\pi}{\omega} \cos n\omega \frac{\pi}{\omega} + \frac{\pi}{\omega} \cos(-n\omega \frac{\pi}{\omega}) \right) + \frac{1}{n\omega} \frac{1}{n\omega} \sin n\omega t' \Big|_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \right] = \\ &= \frac{\omega^2 A}{2\pi^2} \left\{ -\left[\frac{\pi}{n\omega^2} \cos n\pi + \frac{\pi}{n\omega^2} \cos n\pi \right] + \frac{1}{n^2\omega^2} \sin n\omega t' \Big|_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \right\} \\ &= \frac{\omega^2 A}{2\pi^2} \left[\frac{\pi}{n\omega^2} (-2 \cos n\pi) + \frac{1}{n^2\omega^2} (\sin n\pi + \sin n\pi) \right] \implies b_n = -\frac{A}{\pi n} \cos n\pi \end{aligned}$$

Portanto, $b_n = (-1)^{n+1} \frac{A}{\pi n}$, e assim, podemos escrever a $F(t)$ como,

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{A}{\pi n} \sin n\omega t$$

ou seja,

$$F(t) = \frac{A}{\pi} \left(\sin \omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t - + \dots \right)$$

A Figura (7.22) mostra o resultado para 2 termos, 5 termos e 8 termos dessa expansão.

A convergência para a função “dente de serra” não é rápida.

Podemos observar duas características dessa expansão. Para pontos de descontinuidade ($t = \pm\tau/2$), a série fornece o valor médio (zero), e na região imediatamente adjacente aos pontos de descontinuidade, a expansão “overshoots” (a série de Fourier tende a ultrapassar a borda positiva por 9% e a borda negativa pela mesma quantidade, e a inclusão de mais termos não remove esta ultrapassagem, apenas move-a para mais próxima do ponto de descontinuidade). Esse último efeito, conhecido como o FENÔMENO DE GIBBS, ocorre em todas as ordens da aproximação. O “overshoots” de Gibbs é uma quantidade de cerca de 9% em cada lado de qualquer descontinuidade, mesmo no limite de série infinita.

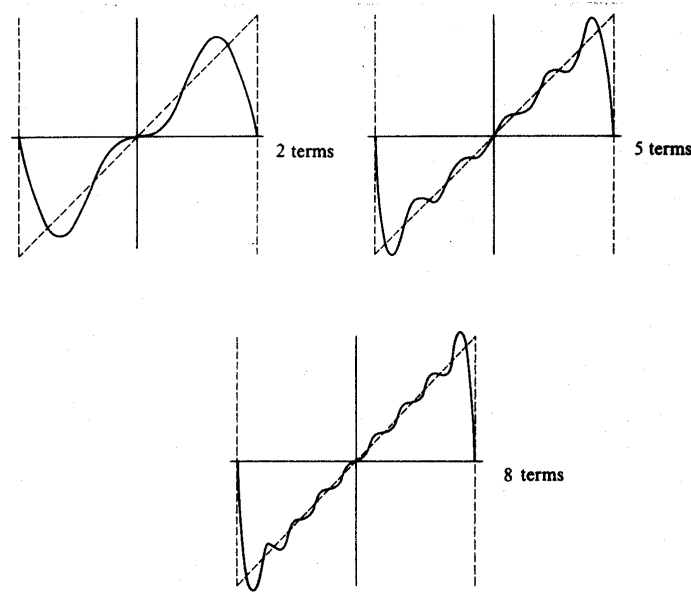


Figura 7.22: Série de Fourier para a Função “dente de serra”.

7.10 A resposta de Osciladores Lineares para Funções Forças Impulsivas

Nas discussões anteriores, tínhamos considerado principalmente oscilações no Estado Estacionário. Para muitos tipos de problemas físicos, particularmente aqueles envolvendo circuitos elétricos oscilantes, os efeitos transientes são bastante importantes. De fato, a solução transiente pode ser de interesse dominante em tais casos. Investigaremos o comportamento transiente de um oscilador linear submetido a uma força motriz que atua descontinuamente. Naturalmente, uma força “descontínua” é uma idealização, porque sempre leva um tempo finito para aplicar uma força. Mas, se o tempo de aplicação é pequeno comparado com o período natural do oscilador, o resultado do caso ideal é uma boa aproximação para a situação física real.

A equação diferencial descrevendo o movimento de um oscilador amortecido é

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} \quad (7.82)$$

A solução geral é composta de duas soluções: a homogênea, x_h , e a particular, x_p , isto é,

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (7.83)$$

Podemos escrever a solução homogênea, $x_h(t)$, como

$$x_h(t) = e^{-\beta t} (A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \sin \omega_1 t) \quad (7.84)$$

onde $\omega_1 \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

A solução particular, $x_p(t)$ depende da natureza da força motriz $F(t)$.

Dois tipos de forças motrizes descontínuas idealizadas são de considerável interesse. Elas são a FUNÇÃO DEGRAU, ou FUNÇÃO DE HEAVISIDE, e a FUNÇÃO IMPULSO, mostradas na Figura (7.23) A Função Degrau, H , é dada por

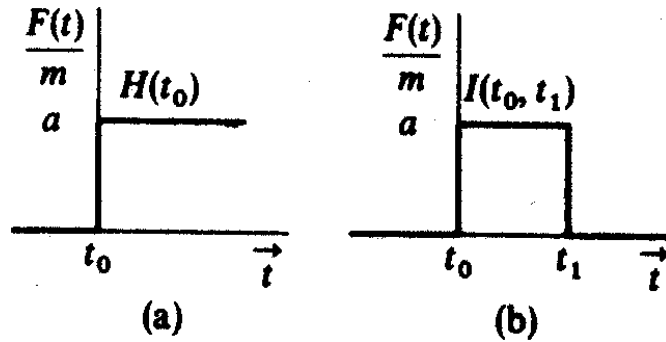


Figura 7.23: Funções Degrau e Impulso.

$$H(t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ a, & t > t_0 \end{cases} \quad (7.85)$$

onde a é uma constante com as dimensões de aceleração e o argumento t_0 indica que o tempo de aplicação da força é $t = t_0$.

A Função Impulso I é uma Função Degrau positiva, aplicada em $t = t_0$, seguida de uma Função Degrau negativa aplicada em algum tempo anterior t_1 . Assim,

$$\begin{cases} I(t_0, t_1) = H(t_0) - H(t_1) \\ I(t_0, t_1) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ a, & t_0 < t < t_1 \\ 0, & t > t_1 \end{cases} \end{cases} \quad (7.86)$$

Embora escrevamos as Funções de Heaviside e Impulso como $H(t_0)$ e $I(t_0, t_1)$ por simplificação, essas funções dependem do tempo t e, mais apropriadamente devem ser escritas como $H(t; t_0)$ e $I(t; t_0, t_1)$.

RESPOSTA PARA UMA FUNÇÃO DEGRAU

Para Funções Degrau, a equação diferencial que descreve o movimento para $t > t_0$ é

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = a \quad ; \quad t > t_0 \quad (7.87)$$

Consideremos as condições iniciais como sendo $x(t_0) = 0$ e $\dot{x}(t_0) = 0$. A solução particular é portanto uma constante, e examinando a Equação (7.87), temos que esta constante deve ser

igual a a/ω_0^2 . Assim, a solução geral para $t > t_0$ é

$$x(t) = e^{-\beta(t-t_0)} [A_1 \cos \omega_1 (t - t_0) + A_2 \sin \omega_1 (t - t_0)] + \frac{a}{\omega_0^2} \quad (7.88)$$

Aplicando as condições iniciais, obtemos

$$\begin{cases} A_1 = -\frac{a}{\omega_0^2} \\ A_2 = -\frac{\beta a}{\omega_1 \omega_0^2} \end{cases} \quad (7.89)$$

pois,

$$x(t_0) = 0 \implies A_1 + \frac{a}{\omega_0^2} = 0 \implies A_1 = -\frac{a}{\omega_0^2}$$

e,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\beta e^{-\beta(t-t_0)} [A_1 \cos \omega_1 (t - t_0) + A_2 \sin \omega_1 (t - t_0)] \\ &+ e^{-\beta(t-t_0)} [-\omega_1 A_1 \sin \omega_1 (t - t_0) + \omega_1 A_2 \cos \omega_1 (t - t_0)] \end{aligned}$$

assim,

$$\dot{x}(t_0) = -\beta A_1 + \omega_1 A_2 = 0 \implies A_2 = -\frac{\beta a}{\omega_1 \omega_0^2}$$

Portanto, para $t > t_0$, temos

$$x(t) = \frac{a}{\omega_0^2} \left[1 - e^{-\beta(t-t_0)} \cos \omega_1 (t - t_0) - \frac{\beta e^{-\beta(t-t_0)}}{\omega_1} \sin \omega_1 (t - t_0) \right] \quad (7.90)$$

Essa função resposta é mostrada na Figura (7.24).

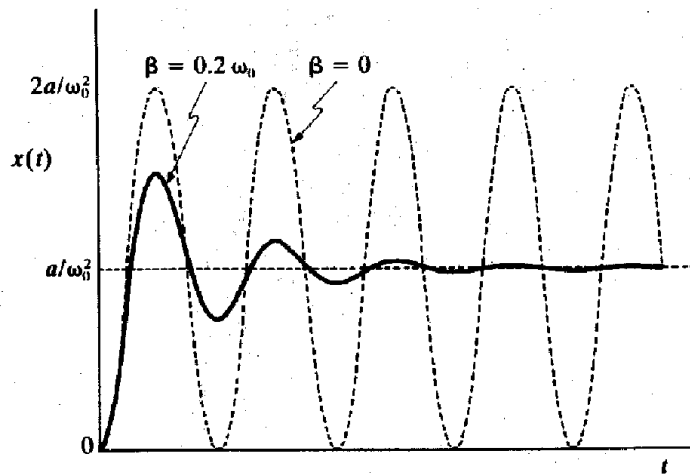


Figura 7.24: Função resposta para o caso $\beta = 0, 2\omega_0$.

Ela mostra que a condição final do oscilador, isto é, a condição de Estado Estacionário, é simplesmente um deslocamento por uma quantidade igual a a/ω_0^2 .

Se não ocorre amortecimento, $\beta = 0$ e $\omega_1 = \omega_o$, então, para $t_o = 0$, temos,

$$x(t) = \frac{H(0)}{\omega_o^2} (1 - \cos \omega_o t) ; \beta = 0 \quad (7.91)$$

A oscilação é assim senoidal com amplitudes extremas $x = 0$ e $x = 2a/\omega_o^2$.

RESPOSTA PARA UMA FUNÇÃO IMPULSO

Se considerarmos a Função Impulso como a diferença entre duas funções Degrau separadas por um tempo $t_1 - t_o = \tau$, então, porque o sistema é linear, a solução geral para $t > t_1$ é dada pela superposição das soluções para as duas funções Degrau consideradas individualmente, isto é,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a}{\omega_o^2} \left[1 - e^{-\beta(t-t_o)} \cos \omega_1 (t - t_o) - \frac{\beta e^{-\beta(t-t_o)}}{\omega_1} \sin \omega_1 (t - t_o) \right] \\ &- \frac{a}{\omega_o^2} \left[1 - e^{-\beta(t-t_o-\tau)} \cos \omega_1 (t - t_o - \tau) - \frac{\beta e^{-\beta(t-t_o-\tau)}}{\omega_1} \sin \omega_1 (t - t_o - \tau) \right] \\ x(t) &= \frac{a e^{-\beta(t-t_o)}}{\omega_o^2} \left[e^{\beta\tau} \cos \omega_1 (t - t_o - \tau) - \cos \omega_1 (t - t_o) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\beta e^{\beta\tau}}{\omega_1} \sin \omega_1 (t - t_o - \tau) - \frac{\beta}{\omega_1} \sin \omega_1 (t - t_o) \right]. \end{aligned} \quad (7.92)$$

A resposta total, isto é, as Equações (7.90) e (7.92) para uma função Impulso de duração $\tau = 5 \frac{2\pi}{\omega_1}$, aplicada em $t = t_o$ é mostrada na Figura (7.25) para $\beta = 0,2\omega_o$. Se fizermos

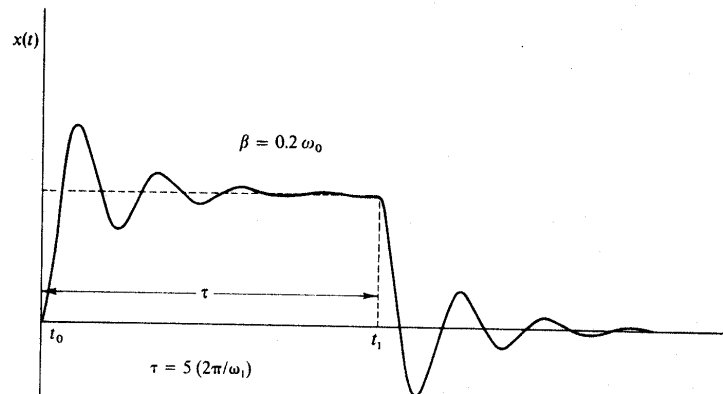


Figura 7.25: Resposta Total para uma Função Impulso.

a duração τ da força impulso se aproximar de zero, a função resposta tornar-se-ia extremamente pequena. Mas se fizermos $a \rightarrow \infty$, quando $\tau \rightarrow 0$ de modo que o produto $a\tau$ seja constante, então a resposta será finita. Esse caso limite particular é consideravelmente importante, porque ela aproxima-se da aplicação de uma força motriz que é um “spike” (espigão) para $t = t_o$, isto é, $\tau \ll 2\pi/\omega_1$. Um “spike” desse tipo é geralmente chamado uma

FUNÇÃO DELTA e escrita como $\delta(t - t_o)$. A função delta tem a propriedade que $\delta(t) = 0$ para $t \neq 0$ e $\delta(0) = \infty$, sendo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_o) dt = 1$$

A função delta não é propriamente uma função no sentido matemático, mas pode ser definida como o limite de uma função bem comportada, altamente localizada, tal como uma função Gaussiana, quando o parâmetro largura aproxima-se de zero.

Queremos expandir a Equação (7.92), fazendo $\tau \rightarrow 0$, mas com $b = a\tau = cte$.

Seja $A = t - t_o$ e $\beta = \tau$, então usando o fato que:

$$\begin{cases} \sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B \\ \cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B \end{cases} \quad (7.93)$$

obtemos,

$$\begin{aligned} x(t) = \frac{a e^{-\beta(t-t_o)}}{\omega_o^2} \left\{ e^{\beta\tau} \left[\cos \omega_1(t-t_o) \cos \omega_1\tau + \sin \omega_1(t-t_o) \sin \omega_1\tau \right] \right. \\ \left. - \cos \omega_1(t-t_o) + \frac{\beta e^{\beta\tau}}{\omega_1} \left[\sin \omega_1(t-t_o) \cos \omega_1\tau - \cos \omega_1(t-t_o) \sin \omega_1\tau \right] \right. \\ \left. - \frac{\beta}{\omega_1} \sin \omega_1(t-t_o) \right\}, \quad t > t_o \end{aligned}$$

Como τ é pequeno, podemos expandir $e^{\beta\tau}$, $\cos \omega_1\tau$ e $\sin \omega_1\tau$, mantendo apenas os primeiros dois termos da expansão em cada, isto é,

$$\begin{cases} e^{\beta\tau} = 1 + \beta\tau \\ \cos \omega_1\tau = 1 - \frac{\omega_1^2\tau^2}{2!} \\ \sin \omega_1\tau = \omega_1\tau + \frac{\omega_1^3\tau^3}{3!} \end{cases} \quad (7.94)$$

Então,

$$x(t) = \frac{a e^{-\beta(t-t_o)}}{\omega_o^2} \left(\omega_1\tau + \frac{\beta^2\tau}{\omega_1} \right) \sin \omega_1(t-t_o); \quad t > t_o \quad (7.95)$$

Usando o fato que $\omega_1^2 = \omega_o^2 - \beta^2$ e $\tau = b/a$, nos fornece, finalmente,

$$x(t) = \frac{b}{\omega_1} e^{-\beta(t-t_o)} \sin \omega_1(t-t_o); \quad t > t_o \quad (7.96)$$

Essa função resposta é mostrada na Figura (7.26) para o caso $\beta = 0,2\omega_o$. Observe que, quando t torna-se grande, o oscilador retorna à sua posição original de equilíbrio.

O fato da resposta de um oscilador linear, para uma força motriz impulsiva, poder ser representada pela maneira simples da Equação (7.96) nos fornece uma técnica poderosa para

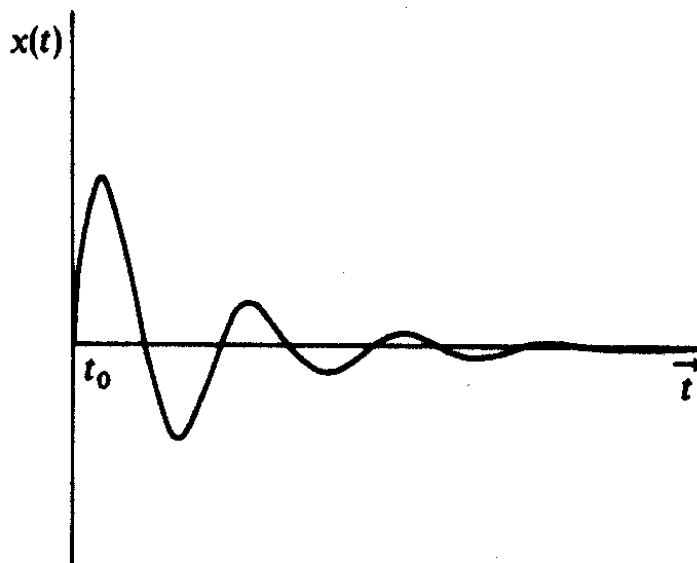


Figura 7.26: Resposta de um oscilador linear para uma força motriz impulsiva.

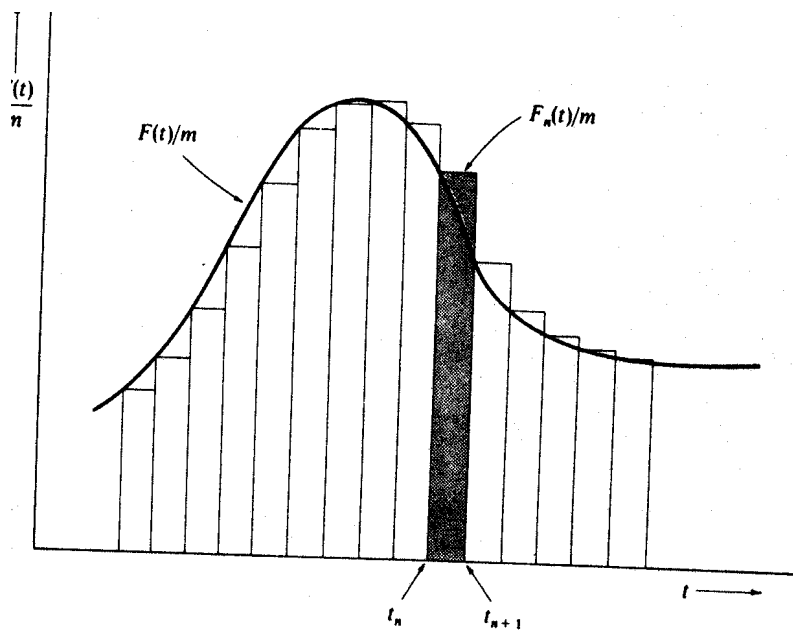


Figura 7.27: O método de Green.

tratar com funções motrizes gerais, que foi desenvolvida por Green. O método de Green é baseado na representação de uma função força arbitrária, como uma série de impulsos, como mostrado esquematicamente na Figura (7.27).

Se o sistema forçado é linear, o princípio da superposição é válido, e podemos expressar a parte não homogênea da equação diferencial dada pela equação (7.82) como a soma das

forças motrizes individuais $F_n(t)/m$, que no método de Green são funções impulsos:

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_o^2 x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F_n(t)}{m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(t) \quad (7.97)$$

onde,

$$I_n(t) = I(t_n, t_{n+1}) = \begin{cases} a_n(t_n) & ; t_n < t < t_{n+1} \\ 0 & ; \text{qualquer outra condição} \end{cases} \quad (7.98)$$

O intervalo de tempo sobre o qual I_n atua é $\tau = t_{n+1} - t_n$, com $\tau \ll 2\pi/\omega_1$. A solução para o n ésimo impulso é, de acordo com a Equação (??),

$$x_n(t) = \frac{a_n(t_n)\tau}{\omega_1} e^{-\beta(t-t_n)} \sin \omega_1(t-t_n) \quad ; \quad t > t_n + \tau \quad (7.99)$$

e a solução para todos os impulsos até, incluindo, o N th impulso é,

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n(t_n)\tau}{\omega_1} e^{-\beta(t-t_n)} \sin \omega_1(t-t_n) \quad ; \quad t_N < t < t_{N+1} \quad (7.100)$$

Se fizermos o intervalo τ aproximar-se de zero e escrevermos t_n como t' , então a soma torna-se uma integral:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a(t')}{\omega_1} e^{-\beta(t-t')} \sin \omega_1(t-t') dt' \quad (7.101)$$

Definamos,

$$G(t, t') = \begin{cases} \frac{1}{m\omega_1} e^{-\beta(t-t')} \sin \omega_1(t-t') & , \quad t > t' \\ 0 & , \quad t < t' \end{cases} \quad (7.102)$$

Como $ma(t') = F(t')$, temos

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t') G(t, t') dt' \quad (7.103)$$

A função $G(t, t')$ é conhecida como a FUNÇÃO DE GREEN para a equação do oscilador linear representado pela Equação (7.82). A solução expressa pela Equação (7.103) foi obtida para uma determinada condição inicial. Para outras condições iniciais, a solução geral pode ser obtida de maneira análoga.

O método de Green é geralmente útil para resolver equações diferenciais lineares, não homogêneas. A principal vantagem do método consiste no fato que a função de Green $G(t, t')$, que é a solução da equação para um elemento infinitesimal da parte não homogênea, já contendo as condições iniciais - assim a solução geral, expressa pela integral da $F(t')G(t, t')$, automaticamente também contém as condições iniciais.

EXEMPLO 05: Encontre $x(t)$ para uma força que decai exponencialmente a partir de $t = 0$ e tendo a seguinte forma para $t > 0$:

$$F(t) = F_o e^{-\gamma t} \quad , \quad t > 0$$

Resolução:

A solução para $x(t)$ de acordo com o método de Green é

$$x(t) = \frac{F_o}{m\omega_1} \int_0^t e^{-\gamma t'} e^{-\beta(t-t')} \sin \omega_1(t-t') dt'$$

Fazendo uma mudança de variável tal que

$$z = \omega_1(t-t') \implies dz = -\omega_1 dt' \implies dt' = -\frac{dz}{\omega_1}$$

e,

$$e^{-\gamma t'} e^{-\beta(t-t')} = e^{-\gamma t} e^{(\gamma-\beta)z/\omega_1}$$

logo,

$$x(t) = -\frac{F_o}{m\omega_1} \int_{\omega_1 t}^0 e^{-\gamma t} e^{(\gamma-\beta)z/\omega_1} \sin z dz \implies x(t) = -\frac{F_o}{m\omega_1} e^{-\gamma t} \int_{\omega_1 t}^0 e^{(\gamma-\beta)z/\omega_1} \sin z dz$$

Seja

$$I = \int e^{kz} \sin z dz, \quad k = (\gamma - \beta)/\omega_1$$

Resolvendo essa integral por partes, temos,

$$\begin{cases} u = e^{kz} \rightarrow du = k e^{kz} dz \\ dv = \sin z dz \rightarrow v = -\cos z \end{cases}$$

Assim,

$$I = uv - \int v du = -e^{kz} \cos z + \int k \cos z e^{kz} dz = -e^{kz} \cos z + k \underbrace{\int \cos z e^{kz} dz}_{=I_1}$$

Resolvendo I_1 por partes, temos,

$$\begin{cases} m = e^{kz} \rightarrow dm = k e^{kz} dz \\ dw = \cos z dz \rightarrow w = \sin z \end{cases}$$

$$I_1 = mw - \int w dm = e^{kz} \sin z - k \underbrace{\int \sin z e^{kz} dz}_{=I} \implies I_1 = e^{kz} \sin z - kI$$

Logo,

$$I = -e^{kz} \cos z + k(e^{kz} \sin z - kI) \rightarrow I = \frac{1}{1+k^2} e^{kz} (k \sin z - \cos z)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{F_o}{m\omega_1^2} e^{-\gamma t} \left[\frac{1}{1+k^2} e^{kz} (k \sin z - \cos z) \right] \Big|_{\omega_1 t}^0 \\ &= -\frac{F_o}{m\omega_1^2} e^{-\gamma t} \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + (\gamma - \beta)^2} \left[-1 - e^{(\gamma-\beta)t} \left(\frac{\gamma - \beta}{\omega_1} \sin \omega_1 t - \cos \omega_1 t \right) \right] \end{aligned}$$

onde $k = \frac{\gamma\beta}{\omega_1}$.

Assim,

$$x(t) = \frac{F_o/m}{(\gamma - \beta)^2 + \omega_1^2} \left[e^{-\gamma t} - e^{-\beta t} \left(\cos \omega_1 t - \frac{\gamma - \beta}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \right] \quad (7.104)$$

Essa função resposta está ilustrada na Figura (7.28) para 3 combinações diferentes dos

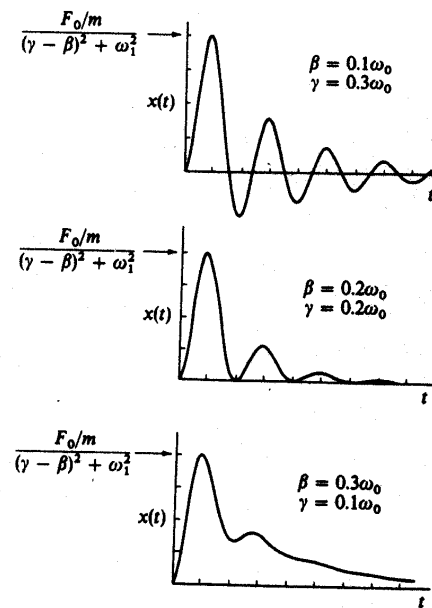


Figura 7.28: Exemplo 05.

parâmetros β e γ . Quando γ é grande comparado com β , e se ambos são pequenos comparados com ω_o , então a resposta aproxima-se para uma “spike”; Comparando a Figura (7.26) com a curva superior da Figura (7.28) podemos observar que quando γ é pequeno comparado com β , a resposta aproxima-se da forma da função propriamente dita, isto é, um aumento inicial seguido por um decaimento exponencial. A curva inferior da Figura (7.28) mostra uma amplitude de decaimento no qual é superimposta uma oscilação residual.

Quando β e γ são iguais, a Equação (7.104) torna-se,

$$x(t) = \frac{F_o}{m\omega_1^2} e^{-\beta t} (1 - \cos \omega_1 t) ; \beta = \gamma \quad (7.105)$$

Assim, a resposta é oscilante com um “período” igual a $2\pi/\omega_1$ mas, com uma amplitude que decai exponencialmente, como mostra a curva do meio da Figura (7.28).

Uma resposta do tipo dada pela Equação (7.104) pode resultar se um circuito eletrônico oscilante fosse subitamente amortecido pelo decaimento da voltagem em um capacitor.

7.11 Problemas Resolvidos

01) Considere um oscilador harmônico simples.

a) Calcule as médias temporais das energias cinética e potencial sobre um ciclo, e mostre que essas quantidades são iguais;

b) Calcule as médias espaciais das energias cinética e potencial.

Resolução:

$$x = A \sin \omega_o t \implies \dot{x} = \omega_o A \cos \omega_o t, \quad \text{com } \omega_o^2 = k/m$$

a) Temos que a média temporal da Energia Cinética é dada por,

$$\langle T \rangle = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \frac{1}{2} m \dot{x}^2 dt$$

onde, $\tau = \frac{2\pi}{\omega_o}$. Como $\dot{x}^2 = \omega_o^2 A^2 \cos^2 \omega_o t$, então

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \frac{1}{2} m \omega_o^2 A^2 \cos^2 \omega_o t dt = \frac{m \omega_o^2 A^2}{4\tau} \int_t^{t+\tau} (1 + \cos 2\omega_o t) dt \\ &= \frac{m \omega_o^2 A^2}{4\tau} \left(t + \frac{1}{2\omega_o} \sin 2\omega_o t \right) \Big|_t^{t+\tau} \implies \langle T \rangle = \frac{m \omega_o^2 A^2}{4} \end{aligned}$$

de maneira análoga, a média temporal da Energia Potencial é dada por,

$$\begin{aligned} \langle U \rangle &= \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2\tau} \int_t^{t+\tau} k A^2 \sin^2 \omega_o t dt = \frac{k A^2}{4\tau} \int_t^{t+\tau} (1 - \cos 2\omega_o t) dt \\ &= \frac{k A^2}{4\tau} \left[t - \frac{1}{2\omega_o} \sin 2\omega_o t \right] \Big|_t^{t+\tau} \implies \langle U \rangle = \frac{m \omega_o^2 A^2}{4} \end{aligned}$$

Portanto, $\langle T \rangle = \langle U \rangle$

b) Considerando que $\dot{x} = \omega_o A \cos \omega_o t \implies \dot{x}^2 = \omega_o^2 A^2 (1 - \sin^2 \omega_o t) = \omega_o^2 (A^2 - x^2)$, temos que a média espacial da Energia Cinética é dada por,

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \frac{1}{A} \int_0^A \frac{1}{2} m \dot{x}^2 dx = \frac{m}{2A} \int_0^A \omega_o^2 (A^2 - x^2) dx = \frac{m \omega_o^2}{2A} \left(A^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^A \\ &= \frac{m \omega_o^2}{2A} \left[A^3 - \frac{A^3}{3} \right] \implies \bar{T} = \frac{m \omega_o^2 A^2}{3} \end{aligned}$$

de maneira análoga, a média espacial da Energia Potencial é dada por,

$$\bar{U} = \frac{1}{A} \int_0^A \frac{1}{2} k x^2 dx = \frac{k}{2A} \frac{x^3}{3} \Big|_0^A \implies \bar{U} = \frac{k A^2}{6}$$

Como $k = m \omega_o^2$, então, $\bar{U} = \frac{m \omega_o^2 A^2}{6}$.

Portanto, $\bar{T} = 2\bar{U}$.

02) Um corpo de área de seção transversal uniforme $A = 1 \text{ cm}^2$ e de densidade de massa $\rho = 0,8 \text{ g/cm}^3$ flutua em um líquido de densidade $\rho_o = 1 \text{ g/cm}^3$ e no equilíbrio desloca um volume $V = 0,8 \text{ cm}^3$. Mostre que o período de pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio é dado por $\tau = 2\pi \sqrt{V/(gA)}$.

Resolução:

De acordo com o princípio de Arquimedes, o empuxo, E , sofrido por um corpo ao ser imerso em um fluido é igual, numericamente, ao peso do volume de fluido deslocado, P_{vfd} , isto é,

$$E = P_{vfd} = \rho_f V g = \rho_o A h_d g \implies E = \rho_o A h_d g$$

onde, V é o volume de fluido deslocado, A é a área do corpo e h_d é a altura do corpo que se encontra submersa.

Como o corpo flutua em equilíbrio, o peso do corpo é igual ao empuxo, isto é, $mg = E$. Assim,

$$\rho A h g = E \implies \rho_o A h_d g = \rho A h g \implies h = \frac{\rho_o}{\rho} h_d$$

onde, h é a altura do corpo.

Para um deslocamento x , temos um novo empuxo sobre o corpo, $E' = \rho_o A (h_d + x) g$. Assim, a força resultante sobre o corpo é dada por,

$$m \ddot{x} = mg - E' \implies \rho A h \ddot{x} = \rho A h g - \rho_o A (h_d + x) g$$

Substituindo o valor de h , obtemos,

$$\rho A h \ddot{x} = \rho A g \frac{\rho_o}{\rho} h_d - \rho_o A h_d g - \rho_o A g x$$

Assim,

$$\ddot{x} + \frac{\rho_o g}{\rho h} x = 0$$

que é a equação do oscilador harmônico simples com frequência angular, $\omega_o = \frac{\rho_o g}{\rho h} = \frac{g}{h_d}$.

O período τ_o é dado por, $\tau_o = \frac{2\pi}{\omega_o}$. Assim, $\tau_o = 2\pi \sqrt{\frac{h_d}{g}}$. Como $V = A h_d$, então,

$$\tau_o = 2\pi \sqrt{\frac{V}{gA}},$$

e seu valor numérico é,

$$\tau_o = 2\pi \sqrt{\frac{0,8 \cdot 10^{-6}}{10 \cdot 10^{-4}}} \implies \tau_o = 4\sqrt{2}\pi \cdot 10^{-2} \text{ s}$$

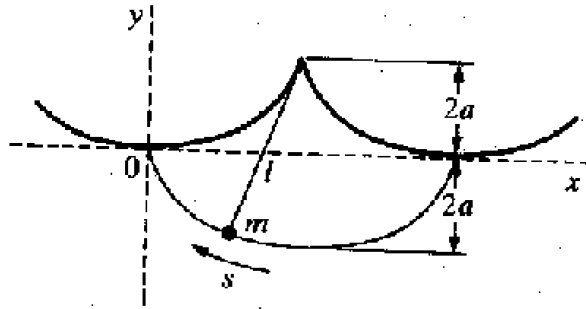


Figura 7.29: Problema Resolvido 03.

03) Um pêndulo está suspenso do vértice de uma cicloide através de um suporte rígido como mostra a Figura (7.29). O caminho descrito pela massa do pêndulo é cicloidial e dado por

$$\begin{cases} x = a(\phi - \sin \phi) \\ y = a(\cos \phi - 1) \end{cases}$$

onde o comprimento do pêndulo é $l = 4a$, e ϕ é o ângulo de rotação do círculo gerado pela cicloide. Mostre que as oscilações são exatamente isócronas com uma frequência $\omega_0^2 = g/l$, independente da amplitude.

Resolução:

$$F = ma = m\dot{v} = -mg \cos \alpha ; \cos \alpha = \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{(dx^2 + dy^2)}$$

Como,

$$\begin{cases} x = a(\phi - \sin \phi) \implies dx = a(1 - \cos \phi) d\phi \\ y = a(\cos \phi - 1) \implies dy = -a \sin \phi d\phi \end{cases}$$

Assim,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = a^2(1 - \cos \phi)^2 d\phi^2 + a^2 \sin^2 \phi d\phi^2 \implies ds^2 = 2a^2(1 - \cos \phi) d\phi^2$$

Considerando que,

$$\sin^2(\phi/2) = \frac{1 - \cos \phi}{2} \implies 1 - \cos \phi = 2 \sin^2 \phi/2$$

$$\text{Logo, } ds^2 = 2a^2 \sin^2 \phi/2 d\phi \implies ds = 2a \sin \phi/2 d\phi.$$

Assim,

$$\cos \alpha = \frac{dy}{ds} = -\frac{a \sin \phi d\phi}{2a \sin(\phi/2) d\phi} \implies \cos \alpha = -\frac{\sin \phi}{2 \sin \phi/2} = \frac{2 \sin \phi/2 \cos \phi/2}{2 \sin \phi/2} = -\cos(\phi/2)$$

Então,

$$\dot{v} = -g \cos \alpha = g \cos(\phi/2) \implies v = g \int \cos \phi/2 d\phi = \frac{g}{2} \sin \phi/2.$$

Mas,

$$v = \frac{ds}{dt} \implies v = 2a \sin(\phi/2) \frac{d\phi}{dt}.$$

Como,

$$\frac{d}{dt}(\cos(\phi/2)) = -\frac{1}{2} \sin(\phi/2) \frac{d\phi}{dt} \implies \sin(\phi/2) \frac{d\phi}{dt} = -2 \frac{d}{dt}(\cos(\phi/2)).$$

Logo,

$$v = -4a \frac{d}{dt}(\cos(\phi/2)) \implies \dot{v} = -4a \frac{d^2}{dt^2}(\cos(\phi/2))$$

e assim,

$$\dot{v} = g \cos(\phi/2) = -4a \frac{d^2}{dt^2}(\cos(\phi/2)) \implies \frac{d^2}{dt^2}(\cos(\phi/2)) + \frac{g}{4a} \cos(\phi/2) = 0$$

Seja $z = \cos(\phi/2)$. Então,

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{g}{4a} z = 0 \implies \omega_o^2 = \frac{g}{4a} = \frac{g}{l} \implies \omega_o = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Como ω independe da Amplitude de oscilação, então o movimento é ISÓCRONO.

04) Uma partícula de massa m está em repouso na extremidade de uma mola de constante de força k , suspensa de um suporte fixo. Em $t = 0$, uma força descendente constante F é aplicada à massa e atua por um tempo t_o . Mostre que, após a força ser removida, o deslocamento da massa de sua posição de equilíbrio, $x = x_o$, é

$$x - x_o = \frac{F}{k} [\cos \omega_o (t - t_o) - \cos \omega_o t]$$

onde $\omega_o = k/m$

Resolução:

Pela Figura (7.30), temos que:

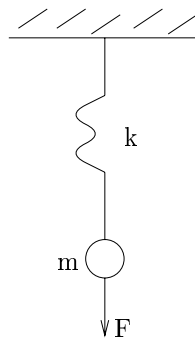


Figura 7.30: Problema Resolvido 04.

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -k(x - x_o) + F ; 0 \leq t \leq t_o \\ m\ddot{x} = -k(x - x_o) ; t \geq t_o \end{cases}$$

Seja $\xi = x - x_o$. Então, $\dot{\xi} = \dot{x}$ e $\ddot{\xi} = \ddot{x}$. Assim,

$$\begin{cases} m\ddot{\xi} = -k\xi + F ; 0 \leq t \leq t_o \\ m\ddot{\xi} = -k\xi ; t \geq t_o \end{cases} \quad (7.106)$$

Resolvamos a primeira das Equações (7.106).

$$m\ddot{\xi} + k\xi = F \implies \ddot{\xi} + \frac{k}{m}\xi = \frac{F}{m} \implies \ddot{\xi} + \omega_o^2\xi = \frac{F}{m}$$

Solução da Homogênea Associada: $\ddot{\xi} + \omega_o^2\xi = 0$

$$\xi_h = A_1 e^{i\omega_o t} + A_2 e^{-i\omega_o t}$$

Solução Particular: $\xi_p = A$. Assim, $\dot{\xi} = 0$ e $\ddot{\xi} = 0$. Substituindo na equação diferencial, encontramos $A = \frac{F}{k}$.

Temos,

$$\xi_{(-)} = \xi_h + \xi_p \implies \xi_{(-)} = \frac{F}{k} + A_1 e^{i\omega_o t} + A_2 e^{-i\omega_o t} ; 0 \leq t \leq t_o$$

De maneira análoga, resolvamos a segunda das Equações (7.106):

$$m\ddot{\xi} + k\xi = 0 \implies \ddot{\xi} + \omega_o^2\xi = 0$$

cuja solução é do tipo

$$\xi_{(+)} = B_1 e^{i\omega_o t} + B_2 e^{-i\omega_o t} ; t \geq t_o$$

Assim temos,

$$\begin{cases} \xi_{(-)} = \frac{F}{k} + A_1 e^{i\omega_o t} + A_2 e^{-i\omega_o t} ; 0 \leq t \leq t_o \\ \xi_{(+)} = B_1 e^{i\omega_o t} + B_2 e^{-i\omega_o t} ; t \geq t_o \end{cases} \quad (7.107)$$

Em $t = 0$,

$$\begin{cases} x = 0 \implies A_1 + A_2 = -\frac{F}{k} \\ \dot{x} = 0 \implies A_1 = A_2 = -\frac{F}{2k} \end{cases}$$

Logo,

$$\xi_{(-)}(t) = \frac{F}{k} - \frac{F}{2k} \underbrace{(e^{i\omega_o t} + e^{-i\omega_o t})}_{2 \cos \omega_o t}$$

Então,

$$\xi_{(-)}(t) = \frac{F}{k} - \frac{F}{2k} 2 \cos \omega_o t \implies \xi_{(-)}(t) = \frac{F}{k} (1 - \cos \omega_o t) ; 0 \leq t \leq t_o$$

Desde que, para qualquer movimento físico, x e \dot{x} devem ser contínuas,

$$\xi_{-}(t = t_o) = \xi_{+}(t = t_o) ; \dot{\xi}_{-}(t = t_o) = \dot{\xi}_{+}(t = t_o)$$

Como,

$$\begin{cases} \xi_{-}(t = t_o) = \frac{F}{k} (1 - \cos \omega_o t_o) \\ \xi_{+}(t = t_o) = B_1 e^{i\omega_o t_o} + B_2 e^{-i\omega_o t_o} \end{cases}$$

e assim,

$$\frac{F}{k} (1 - \cos \omega_o t_o) = B_1 e^{i\omega_o t_o} + B_2 e^{-i\omega_o t_o}. \quad (7.108)$$

Também,

$$\begin{cases} \dot{\xi}_{-}(t = t_o) = \frac{\omega_o F}{k} \sin \omega_o t_o \\ \dot{\xi}_{+}(t = t_o) = i\omega_o (B_1 e^{i\omega_o t_o} - B_2 e^{-i\omega_o t_o}) \end{cases}$$

e portanto,

$$\frac{-iF}{k} \sin \omega_o t_o = B_1 e^{i\omega_o t_o} - B_2 e^{-i\omega_o t_o} \quad (7.109)$$

Somando as Equações (7.108) e (7.109), temos

$$B_1 = \frac{F}{2k} (e^{-i\omega_o t_o} - 1) ; B_2 = \frac{F}{2k} (e^{i\omega_o t_o} - 1)$$

Portanto,

$$\xi_{+}(t) = x - x_o = \frac{F}{k} [\cos \omega_o (t - t_o) - \cos \omega_o t] ; t \geq 0$$

05) Se a amplitude de um oscilador amortecido decresce a $1/e$ de seu valor inicial após n período, mostre que a frequência do oscilador deve ser aproximadamente $[1 - (8\pi^2 n^2)^{-1}]$ vezes a frequência do correspondente oscilador não amortecido.

Resolução:

A amplitude de um oscilador amortecido é dada por

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \delta) \implies x(0) = A$$

Como a amplitude decresce para A/e após n períodos, então,

$$x(n\tau) = A e^{-\beta n\tau} \cos(\omega_1 n\tau - \delta) \implies A e^{-\beta n\tau} = \frac{A}{e} \implies \beta = \frac{1}{n\tau}$$

Mas, $\tau = \frac{2\pi}{\omega_1}$. Então, $\beta = \frac{\omega_1}{2\pi n}$.

Para o oscilador harmônico amortecido,

$$\omega_1^2 = \omega_o^2 - \beta^2 = \omega_o^2 - \frac{\omega_1^2}{4\pi^2 n^2} \implies \omega_1^2 (4\pi^2 n^2 + 1) = 4\pi^2 n^2 \omega_o^2 \implies \frac{\omega_1}{\omega_o} = \left(1 + \frac{1}{4\pi^2 n^2}\right)^{1/2}$$

Temos que, $(1+x)^{-1/2} \cong 1 - 1/2 x$. Então,

$$\frac{\omega_1}{\omega_o} \cong 1 - 1/2 \frac{1}{4\pi^2 n^2} \cong 1 - (8\pi^2 n^2)^{-1} \implies \omega_1 \cong [1 - (8\pi^2 n^2)^{-1}] \omega_o$$

06) Mostre que, se um oscilador forçado é apenas ligeiramente amortecido e forçado próximo à ressonância, a qualidade Q do sistema é aproximadamente

$$Q \cong 2\pi \times \left(\frac{\text{Energia Total}}{\text{Energia perdida durante um período}} \right)$$

Resolução:

A equação do movimento para um oscilador amortecido forçado é

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + kx = F_o \cos \omega t$$

ou,

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_o^2 x = A \cos \omega t \quad (7.110)$$

onde $2\beta = b/m$, $\omega_o^2 = k/m$ e $A = F_o/m$.

Temos que

$$Q = \frac{\omega_R}{2\beta} = \frac{\sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2}}{2\beta} = \frac{\sqrt{\omega_o^2(1 - 2\beta^2/\omega_o^2)}}{2\beta} = \frac{\omega_o}{2\beta} \left(1 - \frac{2\beta^2}{\omega_o^2}\right)^{1/2}$$

Para o movimento levemente amortecido, β é pequeno. Logo,

$$\left(1 - \frac{2\beta^2}{\omega_o^2}\right) \cong 1 - \frac{1}{2} \frac{2\beta^2}{\omega_o^2} = 1 - \frac{\beta^2}{\omega_o^2}$$

Então,

$$Q = \frac{\omega_o}{2\beta} \left(1 - \frac{\beta^2}{\omega_o^2}\right) = \frac{\omega_o}{2\beta} \frac{\omega_o^2 - \beta^2}{\omega_o^2} = \frac{\omega_o^2 - \beta^2}{2\beta \omega_o}$$

Como $\beta \ll 1 \implies \beta^2 \ll \ll 1$. Então,

$$Q \cong \frac{\omega_o^2}{2\beta \omega_o} \implies Q \cong \frac{\omega_o}{2\beta}$$

Mas, $E = T_{max} = \frac{1}{2} m \dot{x}_{max}^2$.

A solução da Equação (7.110) após o tempo inicial (transiente) é

$$x = D \cos(\omega t - \delta) \implies \dot{x} = -\omega D \sin(\omega t - \delta) \implies \dot{x}_{max}^2 = \omega^2 D^2$$

Logo, $E = \frac{1}{2} m \omega^2 D^2$.

A energia perdida durante um período é

$$\begin{aligned} E_p = W_{res} &= \int_0^\tau F_{res} dx = \int_0^\tau b \dot{x} \frac{dx}{dt} dt = \int_0^\tau b \dot{x}^2 dt = \\ &= \int_0^\tau b \omega^2 D^2 \sin^2(\omega t - \delta) dt = b \omega^2 D^2 \int_0^\tau \frac{1 - \cos 2(\omega t - \delta)}{2} dt = \\ &= \frac{b \omega^2 D^2}{2} \left[t \Big|_0^\tau - \frac{1}{2\omega} \sin 2(\omega t - \delta) \Big|_0^\tau \right] \implies E_p = \frac{1}{2} b \omega^2 D^2 \tau \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{E}{E_p} = \frac{1/2 m \omega^2 D^2}{1/2 b \omega^2 D^2 \tau} = \frac{m}{b \tau}$$

onde, E é a energia total e E_p é a energia perdida num período.

Como $\tau = 2\pi/\omega$, então

$$\frac{E}{E_p} = \frac{m \omega}{2\pi b} = \frac{\omega}{2\pi 2\beta}$$

Como $\omega = \omega_o$ e $Q = \frac{\omega_o}{2\beta}$, então

$$\frac{E}{E_p} = \frac{\omega_o}{2\pi} \frac{1}{2\beta} \implies \frac{E}{E_p} = \frac{Q}{2\pi} \implies Q \equiv 2\pi \times \left(\frac{\text{Energia Total}}{\text{Energia perdida durante um período}} \right)$$

07) Um circuito elétrico consiste de um resistor R e um capacitor C conectados em série a uma fonte de força eletromotriz alternada. Encontre a expressão para a corrente como uma função do tempo e mostre que ela decresce à zero quando a frequência da força eletromotriz alternada aproxima-se de zero.

Resolução:

A Equação do circuito representado na Figura (7.31) pode ser escrita como,

$$R \dot{q} + \frac{q}{C} = \epsilon_o e^{i\omega t} \implies R \ddot{q} + \frac{\dot{q}}{C} = i\omega \epsilon_o e^{i\omega t} \implies$$

Como $I = \dot{q}$, então

$$R \dot{I} + \frac{I}{C} = i\omega \epsilon_o e^{i\omega t}$$

Solução da Homogênea Associada: $\dot{I} + \frac{I}{RC} = 0$

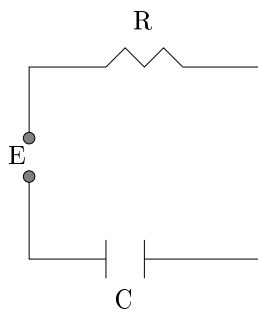


Figura 7.31: Problema Resolvido 07.

Equação característica: $m + \frac{I}{RC} = 0 \implies m = -\frac{I}{RC}$

Logo, a solução da homogênea associada é dada por, $I_h = A e^{-\frac{I}{RC}t}$

Solução Particular: $I_p = B e^{i\omega t} \implies \dot{I}_p = i\omega B e^{i\omega t}$

Substituindo na equação diferencial, temos,

$$R i\omega B e^{i\omega t} + \frac{B}{C} e^{i\omega t} = i\omega \epsilon_o e^{i\omega t} \implies B = \frac{\epsilon_o}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \left(R + \frac{i}{\omega C} \right)$$

Seja $z = R + \frac{i}{\omega C}$.

Então, $|z| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$ e $\tan \phi = \frac{1/(\omega C)}{R} \implies \tan \phi = \frac{1}{\omega R C}$.

Assim, $z = |z| e^{-i\phi} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} e^{-i\phi}$, onde $\phi = \arctan\left(\frac{-1}{\omega R C}\right)$.

Portanto,

$$B = \frac{\epsilon_o}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} e^{-i\phi}$$

No Estado Estacionário, $I_h \rightarrow 0 \implies I = I_p$.

Logo,

$$I(t) = B e^{i\omega t} \implies I(t) = \frac{\epsilon_o \omega C}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} e^{i(\omega t - \phi)}$$

Considerando apenas a parte REAL de $I(t)$,

$$I(t) = \frac{\epsilon_o \omega C}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \cos(\omega t - \phi)$$

Para $\omega \rightarrow 0$, podemos expandir ϕ numa série de potência, e manter apenas termos até segunda ordem em ω , isto é,

$$\phi = \arctan\left(\frac{-1}{\omega R C}\right) \cong -\frac{\pi}{2} + \eta$$

onde η é muito pequeno. Assim,

$$-\frac{1}{\omega RC} = \tan\left(-\frac{\pi}{2} + \eta\right) = -\coth \eta \implies \omega RC = \tan \eta$$

Como η é muito pequeno, $\tan \eta \cong \eta$. Assim,

$$\omega RC \cong \eta$$

Logo,

$$\begin{aligned} \cos(\omega t - \phi) &= \cos\left[\omega t - \left(-\frac{\pi}{2} + \eta\right)\right] = \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \omega RC\right) = \\ &= \cos\left[\omega(t - RC) + \frac{\pi}{2}\right] = -\sin \omega(t - RC) \cong -\omega(t - RC) = \omega(RC - t) \end{aligned}$$

Também,

$$\frac{\omega}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} = \omega(1 + \omega^2 R^2 C^2)^{-1/2} \cong \omega\left(1 - \frac{1}{2}\omega^2 R^2 C^2\right) \cong \omega$$

Então,

$$I(t) = \epsilon_0 C \omega \omega (RC - t) \implies I(t) = \epsilon_0 C \omega^2 (RC - t)$$

Quando $\omega \rightarrow 0 \implies I(t) \rightarrow 0$.

08) A Figura (7.32) ilustra uma massa m_1 amortecida por uma força senoidal cuja frequência

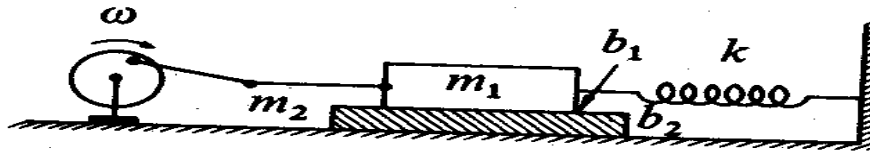


Figura 7.32: Problema Resolvido 08.

é ω . A massa m_1 está presa a um suporte rígido por uma mola de constante de força k e desliza sobre uma segunda massa m_2 . A força de atrito entre m_1 e m_2 é representada pelo parâmetro b_1 , e a força de atrito entre m_2 e a superfície é representado por b_2 . Construa o análogo elétrico desse sistema e calcule a impedância.

Resolução:

As equações do movimento desse sistema são,

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -k x_1 - b_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + F \cos \omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 = -b_2 \dot{x}_2 - b_1 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{cases} \quad (7.111)$$

O análogo elétrico desse sistema pode ser constituído se substituirmos na Equação (7.111) as seguintes quantidades equivalentes

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \rightarrow L_1 \quad m_2 \rightarrow L_2 \\ b_1 \rightarrow R_1 \quad b_2 \rightarrow R_2 \\ F \rightarrow \epsilon_o \\ k \rightarrow 1/C \\ x \rightarrow q \end{array} \right.$$

Então as equações do circuito elétrico equivalente, são dadas por,

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 \ddot{q}_1 + R_1 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + \frac{q_1}{C} = \epsilon_o \cos \omega t \\ L_2 \ddot{q}_2 + R_2 \dot{q}_2 + R_1 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1) = 0 \end{array} \right.$$

ou,

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 \dot{I}_1 + R_1 (I_1 - I_2) + \frac{q_1}{C} = \epsilon_o e^{i\omega t} \\ L_2 \dot{I}_2 + R_2 I_2 + R_1 (I_2 - I_1) = 0 \end{array} \right.$$

Diferenciando em relação ao tempo,

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 \ddot{I}_1 + R_1 (\dot{I}_1 - \dot{I}_2) + \frac{I_1}{C} = i\omega \epsilon_o e^{i\omega t} \\ L_2 \ddot{I}_2 + R_2 \dot{I}_2 + R_1 (\dot{I}_2 - \dot{I}_1) = 0 \end{array} \right.$$

O circuito equivalente é, visto na Figura (7.33) A impedância z do sistema é

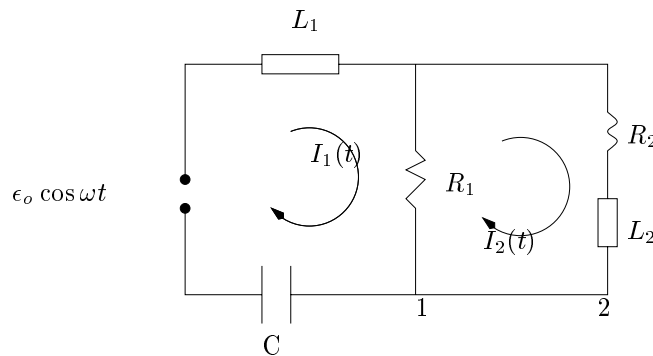


Figura 7.33: Circuito Equivalente.

$$z = i\omega L_1 - \frac{i}{\omega C} + z_1$$

onde,

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + i\omega L_2} \implies \frac{1}{z_1} = \frac{R_2 + i\omega L_2 + R_1}{R_1 (R_2 + i\omega L_2)}$$

Então,

$$z_1 = \frac{R_1 (R_2 + i\omega L_2)}{R_1 + R_2 + i\omega L_2} = \frac{R_1 (R_2 + i\omega L_2) (R_1 + R_2 - i\omega L_2)}{(R_1 + R_2)^2 + \omega^2 L_2^2} =$$

$$z_1 = \frac{R_1 [R_2 (R_1 + R_2) + \omega^2 L_2^2 + i\omega R_1 L_2]}{(R_1 + R_2)^2 + \omega^2 L_2^2}$$

Logo,

$$z = i \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C} \right) + \frac{R_1 [R_2 (R_1 + R_2) + \omega^2 L_2^2 + i\omega L_2 R_1]}{(R_1 + R_2)^2 + \omega^2 L_2^2}$$

e assim,

$$z = \frac{R_1 [R_2 (R_1 + R_2) + \omega^2 L_2^2] + i \left[\omega L_2 R_1 + \left((R_1 + R_2)^2 + \omega^2 L_2^2 \right) \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C} \right) \right]}{(R_1 + R_2)^2 + \omega^2 L_2^2}$$

09) Obtenha a expansão de Fourier da função

$$F(t) = \begin{cases} -1 & -\frac{\pi}{\omega} < t < 0 \\ +1 & 0 < t < \frac{\pi}{\omega} \end{cases}$$

no intervalo $-\pi/\omega < t < \pi/\omega$, onde $\omega = 1 \text{ rad/s}$. Calcule e plote as somas dos dois primeiros termos, dos três primeiros termos, e dos quatro primeiros termos para demonstrar a convergência das séries.

Resolução:

A Figura (7.34) representa a função $F(t)$ dada no problema. Calculemos o termo a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) dt = \frac{\omega}{2\pi} \left[- \int_{-\pi/\omega}^0 dt + \int_0^{\pi/\omega} dt \right] = \frac{\omega}{2\pi} \left(\frac{-\pi}{\omega} + \frac{\pi}{\omega} \right) \implies a_0 = 0$$

O termo a_n é dado por

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) \cos \left(\frac{2\pi n}{T} t \right) dt = \frac{\omega}{\pi} \left[- \int_{-\pi/\omega}^0 \cos n\omega t dt + \int_0^{\pi/\omega} \cos n\omega t dt \right] =$$

$$= \frac{\omega}{\pi} \left[- \frac{1}{n\omega} \sin n\omega t \Big|_{-\pi/\omega}^0 + \frac{1}{n\omega} \sin n\omega t \Big|_0^{\pi/\omega} \right] = \frac{1}{n\pi} \left(- \sin n\pi + \sin n\pi \right) \implies a_n = 0$$

OBSERVAÇÃO: Isso já era esperado pois $F(t)$ é uma função ÍMPAR.

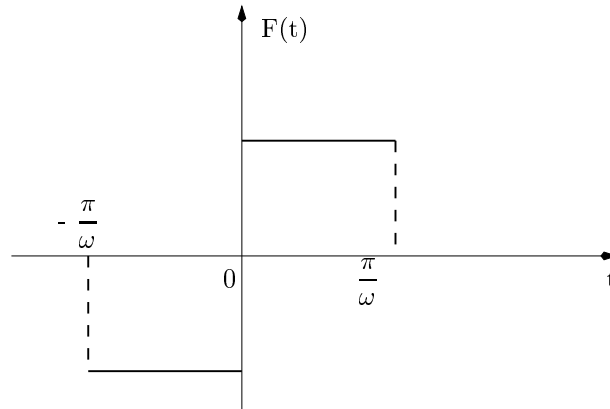


Figura 7.34: Problema Resolvido 09.

Calculemos agora o termo b_n :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt = \frac{\omega}{\pi} \left[- \int_{-\pi/\omega}^0 \sin n\omega t dt + \int_0^{\pi/\omega} \sin n\omega t dt \right] = \\ &= \frac{\omega}{\pi} \left[\frac{1}{n\omega} \cos n\omega t \Big|_{-\pi/\omega}^0 - \frac{1}{n\omega} \cos n\omega t \Big|_0^{\pi/\omega} \right] = \frac{1}{n\pi} \left[(\cos 0 - \cos n\pi) - (\cos n\pi - \cos 0) \right] = \\ &= \frac{1}{n\pi} (2 - 2 \cos n\pi) \implies b_n = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \end{aligned}$$

Se n é par, $\cos n\pi = 1 \implies b_n = 0$ e, se n é ímpar, $\cos n\pi = -1 \implies b_n = \frac{4}{n\pi}$.

Assim,

$$F(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n = \text{ímpar}} \frac{1}{n} \sin n\omega t$$

7.12 Problemas Propostos

01) Um oscilador harmônico simples consiste de uma massa de 100 g presa a uma mola cuja constante de força é 10^4 dina/cm. A massa é deslocada 3 cm e abandonada do repouso. Calcule:

a) a frequência natural ν_o e o período τ_o ; b) a energia total e a velocidade máxima.

02) Considere que o movimento do problema anterior ocorra em um meio resistivo. Após oscilar por 10 s, a amplitude máxima decresce até a metade do valor inicial. Calcule:

a) o parâmetro de amortecimento β ;

b) a frequência ν_1 e compare-a com a frequência não amortecida ν_o ;

c) o incremento do movimento.

03) Um pêndulo simples consiste de uma massa m suspensa de um ponto fixo por uma barra sem peso de comprimento l . Obtenha a equação do movimento e, na aproximação que $\sin \theta \equiv \theta$, mostre que a frequência natural é $\omega_o = \sqrt{g/l}$, onde g é o campo gravitacional. Discuta o movimento se o evento ocorre em um meio viscoso com força resistiva dada por $2m\sqrt{gl}\dot{\theta}$.

04) Considere um pêndulo simples. Determine a frequência natural do sistema:

a) se a massa da barra é pequena comparada à massa da extremidade m ;

b) se a massa da barra não é desprezível e vale M . Considere que a barra é homogênea.

05) Um objeto de massa 20 kg move-se com MHS sobre o eixo x . Em $t = 0$ está localizado a 4 m de distância da origem, tem velocidade de 15 m/s e aceleração de 100 m/s^2 na direção da origem. Encontre:

a) a posição do objeto em qualquer instante;

b) a amplitude, o período e a frequência das oscilações;

c) a força sobre o objeto quando $t = \pi/10\text{ s}$.

06) Uma partícula de massa 5 g move-se ao longo do eixo x sob a influência de duas forças: (i) uma força de atração para a origem que em *dinas* é numericamente igual à 40 vezes a distância instantânea da origem O , e (ii) uma força resistiva proporcional à velocidade instantânea tal que quando a velocidade é 10 cm/s a força de amortecimento é 200 dinas . Suponha que a partícula parte do repouso a uma distância de 20 cm de O .

a) Encontre a posição da partícula em qualquer instante t ;

b) Determine a amplitude, o período e a frequência das oscilações;

c) Determine o incremento logarítmico;

d) Esboce o movimento.

07) Uma partícula de 12 g de massa move-se ao longo do eixo x , atraída para a origem O por uma força, em *dinas* que é igual a 60 vezes sua distância instantânea x , em cm , à origem O . Se a partícula parte do repouso da posição $x = 10\text{ cm}$, encontre:

a) a amplitude do movimento;

b) o período e a frequência do movimento.

08) Uma partícula move-se sobre o eixo x , atraída para a origem O por uma força que

é proporcional à sua distância instantânea da origem. Se ela parte do repouso da posição $x = 5 \text{ cm}$ e atinge a posição $x = 2,5 \text{ cm}$ pela primeira vez após 2 s , encontre:

- a) a posição da partícula em qualquer instante após a partida;
- b) a velocidade quando passa pela origem;
- c) a amplitude, o período e a frequência do movimento;
- d) a aceleração máxima e a velocidade máxima.

09) Uma partícula move-se com MHS em uma linha reta. Sua velocidade máxima é 20 cm/s e sua aceleração máxima é 80 cm/s^2 . Encontre o período e a frequência do movimento.

10) Uma partícula movendo-se com MHS tem velocidade de 3 cm/s e 4 cm/s nas posições 8 cm e 6 cm , respectivamente, da posição de equilíbrio. Encontre o período do movimento.

11) A posição de uma partícula movendo-se ao longo do eixo x é determinada pela equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 8x = 20 \cos 2t$$

Se a partícula parte do repouso em $x = 0$, encontre:

- a) x como função do tempo;
- b) a amplitude, o período e a frequência de oscilação após um longo tempo.

12) Uma partícula de massa 2 g move-se no plano xy atraída para a origem por uma força dada por $\vec{F} = -18x\hat{i} - 50y\hat{j}$ (dinhas). Em $t = 0$ a partícula está localizada no ponto $P = (3, 4)$ e tem uma velocidade cujo módulo é de 10 cm/s numa direção perpendicular ao eixo x . Encontre a posição e a velocidade da partícula em qualquer instante t .

13) Um oscilador harmônico bidimensional de massa 1 g tem energia potencial dada por $V = 8(x^2 + 4y^2)$. Se os vetores posição e velocidade do oscilador em $t = 0$ são dadas, respectivamente por $\vec{r}_o = 2\hat{i} - \hat{j}$ e $\vec{v}_o = 4\hat{i} + 8\hat{j}$, encontre suas posição e velocidade em qualquer instante $t > 0$;

14) Uma partícula de massa m , move-se no plano xy num campo de força dado por $\vec{F} = -k(x\hat{i} + y\hat{j})$. Prove que, em geral, ela se moverá em um caminho elíptico.

15) Uma partícula está sujeita simultaneamente a dois MHS de mesma frequência e direção. Suas equações são $x_1 = 10 \sin(2t + \pi/4)$ e $x_2 = 6 \sin(2t + 2\pi/3)$. Determine o movimento resultante.

16) Um pêndulo simples tem um período de 2 s e amplitude de 2° . Após 10 oscilações completas, a amplitude reduz-se a $1,5^\circ$. Calcule a constante de amortecimento γ .

17) Um bloco de madeira, cuja densidade relativa à água é ρ , tem as dimensões a , b e

c. Enquanto flutua na água, com o lado a na vertical, o bloco é empurrado para baixo. Calcule o período da oscilação resultante.

18) Uma partícula de massa m move-se ao longo do eixo x sob a ação da força $F = -kx$. Quando $t = 2\text{ s}$, a partícula passa pela origem e, quando $t = 4\text{ s}$, sua velocidade é de 4 m/s . Determine a equação da elongação e demonstre que a amplitude do movimento será de $\frac{32\sqrt{2}}{\pi}m$, se o período de oscilação for de 16 s .

19) Uma partícula, cuja massa é de 500 g , move-se com um MHS. O período é de $0,1\text{ s}$ e a amplitude do movimento é de 10 cm . Calcule a aceleração, a força, a energia potencial e a energia cinética quando a partícula está a 5 cm da posição de equilíbrio.

20) Uma tábua horizontal move-se horizontalmente, com um MHS cuja amplitude é de $1,5\text{ m}$. Se a tábua oscila na razão de 15 rpm , calcule o coeficiente de atrito mínimo necessário para que um corpo colocado sobre a tábua não escorregue, enquanto a tábua se move.

21) Mostre que para um circuito R-L-C em que a resistência é pequena, o incremento logarítmico das oscilações é aproximadamente $\pi R \sqrt{C/L}$.

22) Obtenha a série de Fourier que representa a função

$$F(t) = \begin{cases} 0, & -2\pi/\omega < t < 0 \\ \sin \omega t, & 0 < t < 2\pi/\omega \end{cases}$$

23) Obtenha a resposta de um oscilador linear para a função força

$$\frac{F(t)}{m} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ a \sin \omega t, & 0 < t < \pi/\omega \\ 0, & t > \pi/\omega \end{cases}$$

24) Use o método de Green para obter a resposta de um oscilador amortecido para uma função força do tipo

$$F(t) = \begin{cases} 0, & -\pi/\omega < t < 0 \\ F_0 e^{-\gamma t} \sin \omega t, & t > 0 \end{cases}$$

8

Gabarito

CAPÍTULO 1:

01)

$$\lambda = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

02) a) $3\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$; $\sqrt{14}$; b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; c) $\cong 71^\circ$; d) $5\hat{i} + \hat{j} + 7\hat{k}$; e) $10\hat{i} + 2\hat{j} + 14\hat{k}$.

03) a) $2\omega b \cos \omega t \hat{i} - \omega b \sin \omega t \hat{j}$; $-2b\omega^2 \sin \omega t \hat{i} - b\omega^2 \cos \omega t \hat{j}$; $b\omega \sqrt{1 + 3 \cos^2 \omega t}$;
b) $\frac{\pi}{2}$.

04) $\vec{X} = \frac{\vec{B} \times \vec{A} + \phi \vec{A}}{A^2}$.

05) a) -104 ; b)

$$\begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 13 & 9 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 3 & -5 \\ 25 & 14 \end{pmatrix}$$

d)

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$06) \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$09) \text{ a) } -\frac{3v^2}{4k} \quad ; \quad \text{ b) } \frac{3v^2}{4k} \sqrt{\frac{2}{1+\cos\theta}} \quad ; \quad \text{ c) } \frac{v}{\sqrt{2kr}}$$

$$16) \vec{A} \times \vec{A} + \vec{C}$$

$$17) \pi c^2 d$$

$$18) -\pi$$

$$19) \text{ a) } -\frac{\sqrt{14}}{2744} (3, 6, 9) \quad ; \quad \text{ b) } \frac{3}{196} \quad ; \quad \text{ c) } \cos \alpha = -\frac{\sqrt{14}}{14}, \cos \beta = -3 \frac{\sqrt{14}}{7}, \cos \gamma = -9 \frac{\sqrt{14}}{14}$$

$$20) \text{ a) } \frac{\sqrt{3}}{3} (1, 1, 1) \quad ; \quad \text{ b) } x + y + z - 3 = 0$$

$$21) -3\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$22) \text{ a) } \omega r^2 \hat{k} \quad ; \quad \text{ b) } \text{demonstração}$$

$$23) \pi \text{ e } -\pi$$

24) para C_1 : reta que liga os dois pontos - $\tau = 40$

para C_2 : $(1, 1) \rightarrow (3, 1) \rightarrow (3, 3) - \tau = 12$

CAPÍTULO 2:

01) $t_o = \frac{2 v_o \sin(\alpha - \beta)}{g \cos \beta}$

02) demonstraçãõ

03) a) $\frac{v_o}{g}$ b) $\frac{v_o}{g} \left(1 - \frac{k v_o}{2g} + \frac{1}{3} \frac{k^2 v_o^2}{g^2} - + - \dots \right)$

SUGESTÃO: para $z \ll 1$, $\text{Ln}(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - + \dots$

04) demonstraçãõ

05) SUGESTÕES:

$$\int \frac{dx}{x(x^2 + a^2)} = \frac{1}{2a^2} \text{Ln} \left[\frac{x^2}{x^2 + a^2} \right]$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \arcsin \left[\frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \right] + Cte, \text{ onde}$$

$$a < 0; |2ax + b| < \sqrt{b^2 - 4ac}; b^2 > 4ac$$

06) a) $t_o = \frac{2 v_o^2 \sin(\alpha - \beta) \cos \alpha}{g \cos \beta^2}$ b) $\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}$ c) $\frac{v_o^2}{g(1 + \sin \beta)}$

07) SUGESTÕES:

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \tanh^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + C$$

$$\int \tanh x \, dx = \text{Ln} \cosh x + C$$

08) $\sin \alpha_{max} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

09) demonstraçãõ

10) demonstraçãõ

11) $x = 4 [t - (2-t)e^{-t/2} - 4]$; $v = 4 - 2e^{-t/2} (t+2)$; $a = te^{-t/2}$

12) a) $N_A = mg \frac{(R+2h)}{R}$; $N_B = \frac{mg}{2R} [4h + (3\sqrt{2} - 4)R]$

b) $\sqrt{g [2h - (2 - \sqrt{2})R]}$

c) $\frac{4h - R(4 - 3\sqrt{2})}{2}$

13) $\sin \theta = \frac{1 \pm \mu_k \sqrt{4\mu_k^2 + 3}}{2(1 + \mu_k^2)}$

$$14) F = -\frac{m \alpha^2}{x^3}$$

$$15) \text{ a) } -\alpha^2 n m x^{-(2n+1)} \quad ; \quad \text{ b) } [(n+1) \alpha t]^{(n+1)^{-1}} \quad ; \quad \text{ c) } -\alpha^2 n m [(n+1) \alpha t]^{-\frac{(2n+1)}{(n+1)}}$$

$$16) \text{ a) } \frac{1}{\beta} \text{Ln} \left[\frac{m e^{\beta v_o}}{m + \alpha \beta e^{\beta v_o} t} \right] \quad ;$$

$$\text{ b) } t_o = \frac{m (e^{\beta v_o} - 1)}{\alpha \beta e^{\beta v_o}} \quad ;$$

$$\text{ c) } x(t_o) = \frac{m}{\alpha \beta^2 e^{\beta v_o}} (1 - \beta v_o - e^{\beta v_o} - 2 \text{Ln} m)$$

SUGESTÃO: $\int \text{Ln} x dx = x \text{Ln} x - x$

$$17) \text{ a) } a_t = \frac{2 A \alpha^2 \sin \alpha t}{\sqrt{5 - 4 \cos \alpha t}}$$

18) $U(x) = \frac{k x^2}{2} - \frac{k x^4}{4 \alpha^2}$; pontos de equilíbrio - $x_1 = 0$ (equilíbrio estável) , $x_{2,3} = \pm \alpha$ (equilíbrio instável) ; quando $E = 1/4 k \alpha^2$, a partícula encontra-se em equilíbrio instável na posição $x = \pm \alpha$.

19) $x = a$, equilíbrio estável; $x = -a$, equilíbrio instável

20) demonstração

$$21) \text{ a) } U(x) = - \left[U_o + (U_o + U_1) \left(\frac{x^4}{x_1^4} - \frac{2 x^2}{x_1^2} \right) \right]$$

$$\text{ b) } F = 4 (U_o + U_1) \left[\frac{x^3}{x_1^4} - \frac{x}{x_1^2} \right]$$

\text{ c) } $x = 0$ (equilíbrio estável) ; $x = \pm x_1$ (equilíbrio instável)

CAPÍTULO 4:

$$01) \omega = \sqrt{\frac{2K}{m}} \quad y_e = \frac{mg}{2k}$$

$$02) 2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{2g}{l} \sin \theta_1 = 0$$

$$\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{g}{l} \sin \theta_2 = 0$$

$$03) \ddot{\theta} + \left(\frac{a+g}{b}\right) \sin \theta = 0 \quad ; 2\pi \sqrt{\frac{b}{a+g}}$$

$$04) \ddot{\theta} + \frac{g}{b} \sin \theta - \frac{a}{b} \omega^2 \sin(\omega t) \cos \theta = 0$$

05) A energia não é conservada.

$$06) \ddot{z} = -\frac{gk^2}{r^2 + k^2}$$

$$07) H = \frac{1}{2} \frac{p_\theta^2}{ml^2} - mgl \cos \theta \quad ; \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2} \quad ; \dot{p}_\theta = -mgl \sin \theta$$

08) A energia não é conservada.

CAPÍTULO 5:

01) demonstraçã

$$02) \frac{x^2}{\frac{\alpha}{1+\epsilon}} + \frac{y^2}{\frac{\alpha}{1-\epsilon}} = 1 \quad ; \quad \alpha = \frac{l^2}{\mu \epsilon} \quad ; \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{l^2 k}{\mu E^2}}$$

03) demonstraçã

$$04) F(r) = -\frac{l^2}{\mu} \left(\frac{6k}{r^4} + \frac{1}{r^3} \right)$$

05) demonstraçã

06) demonstraçã

07) demonstraçã

CAPÍTULO 6:

01) $2, 16 \cdot 10^{-14} \text{ rad/s}$; $3, 7 \cdot 10^{53} \text{ kg m}^2/\text{s}$; $-4 \cdot 10^{39} \text{ J}$

02) $\frac{9 G m}{200 a^2}$; $-\frac{9 G m}{20 a}$

03) $\rho = \frac{c}{2 \pi r}$

04) $v_e = \sqrt{\frac{2 G M_T}{R_T}}$; $11, 2 \text{ km/s}$

05) demonstraçã

06) $F_z = -\frac{G M}{z^2}$

07) $\phi = -\frac{G M}{l} \text{Ln} \left[\frac{\sqrt{l^2 + 4 R^2} + l}{\sqrt{l^2 + 4 R^2} - l} \right]$

08) $F_z = -2 \pi G \rho \left[\sqrt{a^2 + (z_o - l)^2} - \sqrt{a^2 + z_o^2} + l \right]$

09) demonstraçã

10) $v = \sqrt{\frac{5 G M}{3 R}}$

11) $6, 53 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$; $5, 12 \cdot 10^{-8} \text{ m/s}^2$; zero

12) $2, 5 \cdot 10^{11} \text{ kg m}^2/\text{s}^2$; $1, 25 \cdot 10^{11} \text{ J}$; $-2, 5 \cdot 10^{11} \text{ J}$; $1, 25 \cdot 10^{11} \text{ J}$

13) $\frac{(\sqrt{3} - 1) a}{2}$; $-\frac{(\sqrt{3} + 1) a}{2}$; $\frac{a}{4}$

14) $g = \frac{4 G m}{a^2}$ e $\phi = -\frac{6 G m}{a}$; $g = \frac{\sqrt{7} G m}{a^2}$ e $\phi = -\frac{3 G m}{a}$

15) 9

CAPITULO 7:

01) $\frac{5}{\pi} \text{ hz}$ e $\frac{\pi}{5} \text{ s}$; $4,5 \cdot 10^4 \text{ erg}$ e 30 cm/s

02) $6,9 \cdot 10^{-2} / \text{s}$; $1,59 / \text{s}$; $1,0433$

03) $\ddot{\theta} + 2\sqrt{\frac{g}{l}}\dot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$; movimento criticamente amortecido

04) $\omega_o = \sqrt{\frac{g}{l}}$; $\omega = \sqrt{\frac{3g(2m+M)}{2l(3m+M)}}$

05) $x = 4 \cos 5t - 3 \sin 5t$; $A = 5 \text{ m}$, $T = \frac{2\pi}{5} \text{ s}$; 1500 N

06) $x = 20 e^{-2t} (\cos 2t + \sin 2t)$; $A = 20\sqrt{2} \text{ m}$, $T = \pi \text{ s}$, $f = \frac{1}{\pi} \text{ hz}$; 2π

07) 10 cm ; $T = \frac{2\sqrt{5}\pi}{5} \text{ s}$ e $f = \frac{\sqrt{5}}{2\pi} \text{ hz}$

08) a) $x = 5 \cos \pi/6 t$

b) $-\frac{5\pi}{6} \text{ cm/s}$

c) 5 cm , 12 s , $\frac{1}{12} \text{ hz}$

d) $\frac{5\pi^2}{36} \text{ cm/s}^2$, $\frac{5\pi}{6} \text{ cm/s}$

09) $\frac{\pi}{2} \text{ s}$; $\frac{2}{\pi} \text{ hz}$

10) $4\pi \text{ s}$

11) $x = \cos 2t + 2 \sin 2t - e^{-2t} (\cos 2t + 3 \sin 2t)$; $\sqrt{5} \text{ cm}$; $\pi \text{ s}$; $\frac{1}{\pi} \text{ hz}$

12) $\vec{r} = 3 \cos 3t \hat{i} + (4 \cos 5t + 2 \sin 5t) \hat{j}$; $\vec{v} = -9 \sin 3t \hat{i} + (10 \cos 5t - 20 \sin 5t) \hat{j}$

13) $\vec{r} = (2 \cos 4t + \sin 4t) \hat{i} + (\sin 8t - \cos 8t) \hat{j}$; $\vec{v} = (4 \cos 4t - 8 \sin 4t) \hat{i} + (8 \cos 8t + 8 \sin 8t) \hat{j}$

14) demonstraçã

15) $x = 12,92 \sin(2t + 1,42)$

16) $1,44 / \text{s}$

17) $2\pi \sqrt{a/g}$

18) $x = \frac{32\sqrt{2}}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{8}t - \frac{3\pi}{4}\right)$

19) $20 \pi^2 m/s^2$; $10 \pi^2 N$; $\frac{\pi^2}{4} J$; $\frac{3 \pi^2}{4} J$

20) 0,37

21) demonstraçã

22)

$$F(t) = \frac{1}{2} \sin \frac{\omega t}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_n \frac{1}{4 - n^2} \cos \frac{n \omega t}{2} ; n \text{ impar}$$